



ΟΜΑΔΑ ΑΣΤΡΙΚΗΣ ΦΑΣΜΑΤΟΣΚΟΠΙΑΣ

Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τμήμα Φυσικής



**Εισαγωγή στη Θεωρία των
Αστέρων Νετρονίων και των Μελανών Οπών**

Συ-ραφέας
Δρ Μάνος Δανέζης
Αστροφυσικός

Αθήνα 2019

Πρόλογος

Η Εισαγωγή στην Θεωρία των Αστέρων Νετρονίων και των Μελανών Οπών δεν αποτελεί ένα πρωτότυπο συγγραφικό έργο αλλά ένα προϊόν επιλογής, επεξεργασίας και επιμέλειας κειμένων από το σύνολο της αναφερόμενης βιβλιογραφίας.

Σημαντική βοήθεια στην διαμόρφωση του τελικού κειμένου υπήρξε μια διπλωματική εργασία (δυστυχώς αγνώστου συγγραφέα) η οποία έγινε πριν από τουλάχιστον 25 χρόνια στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Αθηνών, υπό την επίβλεψη του Καθηγητή Αστροφυσικής κ. Σωτήρη Σβολόπουλου

Για όλους τους προηγούμενους λόγους μπορούμε να θεωρηθούμε ως Συ-
ραφείς των παρουσιαζόμενων κειμένων και όχι ως Συγγραφείς.

Στο πλαίσιο των κειμένων μας ο αναγνώστης μας μπορεί να βρει, ως εισαγωγικές γνώσεις, εκτενή κείμενα προπτυχιακού επιπέδου κατάλληλα να εισάγουν τους φοιτητές μας στα επόμενα μαθηματικοποιημένα κεφάλαια.

Στόχος αυτής της εισαγωγής είναι η αρχική απλή κατανόηση κάποιων βασικών φαινομένων και όχι η απλή φορμαλιστική παράθεση γνώσεων. Για τον σκοπό αυτό άλλωστε πριν την εισαγωγή στη θεωρία των αστέρων νετρονίων και των μελανών οπών αναφερόμαστε, εν ολίγης, στα φαινόμενα των Supernovae, ως προαγγέλους της μετέπειτα αστρικής εξέλιξης.

Ελπίζουμε να αποδειχθούμε συνεπείς ως προς τον στόχο μας

Ο συ-ραφέας

Περιεχόμενα

Πρόλογος	2
Περιεχόμενα	3
Από το Μεσοαστρικό αέριο στους	
Υπερκαινοφανείς Αστέρες	5
Εξέλιξη των αστέρων	6
Από το Μεσοαστρικό αέριο στον Λευκό Νάνο	6
Υπερκαινοφανείς αστέρες (Supernovae)	8
Ο μηχανισμός δημιουργίας ενός Υπερκαινοφανούς	8
Τα παρατηρησιακά δεδομένα	9
Κοσμολογική σημασία των Υπερκαινοφανών	12
Οι κοσμολογικές ερμηνείες του φαινομένου	12
Άστρα Νετρονίων (Neutron Stars)	15
Εισαγωγή	16
Οι αστέρες Νετρονίων	17
Η δομή των αστέρων Νετρονίων	20
Βαρυτική κατάρρευση	31
Μελανές Οπές	50
Εισαγωγή	51
Το Θεώρημα του Penrose	53
Τα παράδοξα αποτελέσματα μιας σημειακής ιδιομορφίας	54
Η Λευκή Οπή	55
Τα κυριότερα είδη Μελανών Οπών	57
Η Μελανή Οπή Schwarzschild	57
Η Μελανή Οπή Kerr	58
Η Μελανή οπή Reissner-Nordstrom	59
Η μελανή οπή Kerr-Newman	59
Η σημειακή ιδιομορφία στην κβαντική Φυσική	59
Μελανή οπή και κώνος φωτός	59
Η απαγορευτική αρχή του Penrose	62
Γέφυρες Einstein-Rosen (σκουληκότρυπες)	63
Οι αρχέγονες μαύρες τρύπες	65
Παράδοξα φαινόμενα στο περιβάλλον μιας Μελανής Οπής	67
Όταν η μάζα φουσκώνει	67
Πως ανιχνεύουμε την ύπαρξη μιας Μελανής Οπής	68
Οι δίδυμοι πίδακες	69
Το φάσμα του Η πιθανή μελανή οπή Cyg X-1	70
Διπλές μαύρες τρύπες	72
Μαύρες τρύπες στα κέντρα των γαλαξιών	74
Βαρυτική Κατάρρευση	76

Βαρυτική Κατάρρευση Σφαιρικού και μη περιστρεφόμενου Σώματος χωρίς Φορτίο (Μελανή Οπή Schwarzschild).	76
Βαρυτική κατάρρευση μη σφαιρικού και περιστρεφόμενου σώματος (Μελανή Οπή Kerr)	91
Βαρυτική κατάρρευση σφαιρικά συμμετρικού και φορτισμένου σώματος	102
Βαρυτική κατάρρευση μη σφαιρικού αξονικά συμμετρικού και φορτισμένου σώματος (περιστροφή κατά τον z άξονα)	113
Μελανές οπές και αστέρες Νετρονίων στην εξέλιξη διπλών συστημάτων.	126
Βαρυτικά Κύματα	137
Βιβλιογραφία	157



Από το Μεσοαστρικό Αέριο στους Υπερκαινοφανείς Αστέρες

Για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε: *Το Σύμπαν που αγάπησα-Εισαγωγή στην Αστροφυσική*, Μάνος Δανέζης και Στράτος Θεοδοσίου, Εκδόσεις Δίαυλος, Αθήνα 1999

Εξέλιξη των αστερών

Από το Μεσοαστρικό Αέριο στον Λευκό Νάνο

Ένας αστέρας είναι ένα υλικό σώμα και επομένως για να δημιουργηθεί χρειάζεται ύλη. Η ύλη βρίσκεται παντού μέσα στον «κενό» χώρο με την μορφή της μεσοαστρικής ύλης, άρα ένας αστέρας μπορεί να γεννηθεί από την μεσοαστρική ύλη. Ακριβέστερα ένας αστέρας γεννιέται από ένα νέφος μεσοαστρικού αερίου και σκόνης που για κάποια αιτία αρχίζει να περιστρέφεται και περιστρεφόμενο αποσπάται από την υπόλοιπη μεσοαστρική ύλη γύρω του και αρχίζει να συστέλλεται.

Αποτελέσματα της συστολής του είναι η αύξηση της πυκνότητάς, της βαρύτητας και της θερμοκρασίας του.

Γι' αυτήν την αρχική φάση όπου ένα τμήμα της μεσοαστρικής ύλης αρχίζει να παίρνει την μορφή αστρικής συμπυκνώσεως γνωρίζουμε ελάχιστα, αλλά από την στιγμή που η πρώτη αστρική συμπύκνωση έχει σχηματισθεί έχουμε πια μια μάζα αερίου που συστέλλεται κάτω από την επίδραση της δικής του βαρύτητας και που η εξέλιξη του εσωτερικού του ρυμίζεται από την υδροστατική ισορροπία και την απώλεια ενεργείας λόγω ακτινοβολίας. Παράλληλα η διαδοχική αύξηση της συγκεντρώσεως μάζης στο κέντρο του, σαν αποτέλεσμα της δικής του βαρύτητας, προκαλεί έκλυση ενεργείας που αφ' ενός αντισταθμίζει τις λόγω ακτινοβολίας απώλειες και αφ' ετέρου αυξάνει την θερμοκρασία. Η αύξηση της θερμοκρασίας συνεπάγεται όμως και αύξηση της πίεσεως μέχρις ότου κάποια στιγμή στο κέντρο του οι συνθήκες πίεσεως και θερμοκρασίας θα ευνοήσουν πυρηνικές αντιδράσεις και αυτές με τη σειρά τους θα δημιουργήσουν συνθήκες ευνοϊκές ώστε να δοθεί έναυσμα και σε θερμοπυρηνικές αντιδράσεις. Η στιγμή ακριβώς αυτή της πυρηνικής αναφλέξεως στο εσωτερικό είναι η στιγμή της γεννήσεως του αστέρος.

Σε μερικές τιμές της διαδοχικά μεταβαλλομένης θερμοκρασίας νέες πυρηνικές καύσεις αρχίζουν και τότε οι θερμοπυρηνικές αντιδράσεις αντισταθμίζουν τις απώλειες ενεργείας οπότε η πίεση του αερίου και της ακτινοβολίας μπορούν να υποστηρίξουν τα στρώματα του αστέρα και η συστολή λόγω βαρύτητας σταματά επί ορισμένο χρονικό διάστημα για να συνεχιστεί πάλι μετά.

Έτσι ένας αστέρας καίει πρώτα το υδρογόνο του σε μια θερμοκρασία $2 \cdot 10^7 \text{ }^\circ\text{K}$ με αντιδράσεις πρωτονίων αν $M \leq 2M_\odot$ ή με τον κύκλο του άνθρακος αν $M \geq 2M_\odot$ και όταν το υδρογόνο του πυρήνα εξαντληθεί ο αστέρας συστέλλεται μέχρις ότου η άνοδος της θερμοκρασίας προκαλεί την καύση του υδρογόνου σε ανώτερη στιβάδα που περιβάλλει τον πυρήνα.

Αν ο αστέρας είναι αρκετά μαζικός τότε η συστολή του είναι μεγαλύτερη και η θερμοκρασία του φθάνει μέχρι 10^8 °K οπότε στον πυρήνα αρχίζουν οι θερμοπυρηνικές αντιδράσεις καύσεως ηλίου.

Από τη μάζα του αστέρος επίσης θα εξαρτηθεί αν θα αναπτυχθούν σ' αυτόν και οι καύσεις άνθρακος νέου και οξυγόνου και γενικά η όλη μορφή των θερμοπυρηνικών του αντιδράσεων.

Μετά τις διαδοχικές αυτές καύσεις, που αρχίζουν πάντα στον πυρήνα και μετά την εξάντληση του εκεί υλικού συνεχίζονται, δια συστολής και ανόδου θερμοκρασίας, σε ανώτερες στιβάδες, ο αστέρας αποτελείται από μια κατανομή ομοκέντρων στιβάδων – υπολειμμάτων από τις θερμοπυρηνικές αντιδράσεις που συνέβησαν σ' αυτόν.

Τέλος μετά την εξάντληση των πυρηνικών του καυσίμων η μόνη πηγή ενεργείας του αστέρος είναι η δυναμική ενέργεια που απελευθερώνεται από τη συνεχιζόμενη συστολή και η θερμική που απέμεινε.

Ο αστέρας θα συνεχίσει να συστέλλεται αυξανομένης της θερμοκρασίας του και της πυκνότητας ενώ ο πυρήνας του θα ψύχεται με την εκπομπή νετρίνο η οποία αν είναι αρκετά έντονη θα οδηγήσει σε πυρήνα με εκφυλισμένη μορφή και έτσι αν ο αστέρας δεν εκραγεί με το τέλος των πυρηνικών του αντιδράσεων καταλήγει σε σύστημα βαρυονίων με απόλυτη θερμοκρασία μηδέν.

Τότε η πίεση στο εσωτερικό του εξαρτάται μόνο από την πυκνότητα του αστέρος και η παραπέρα εξέλιξή του δεν είναι παρά τη αύξηση της πυκνότητάς του κάτω από τη συμπίεση της βαρύτητας.

Οι Wheeler και Harrison από το 1958 έδωσαν μια πρώτη καταστατική εξίσωση για ένα τέτοιο σύστημα και σύμφωνα με τις διερευνήσεις λίγο μετά την παύση των πυρηνικών αντιδράσεων ο αστέρας έχει έναν πυρήνα Fe^{56} γιατί ένα τέτοιος πυρήνας είναι πιο ευσταθής.

Τότε η πίεση στο εσωτερικό του αστέρος οφείλεται στις δυνάμεις μεταξύ των ατόμων καθώς οι απωστικές δυνάμεις Coulomb μεταξύ των εξωτερικών ηλεκτρονικών «φλοιών» (τροχιακών) και η «ελαστικότητα» αυτών των «φλοιών» εξισορροπούν για λίγο την συνεχώς αυξανομένη βαρύτητα έως ότου οι ηλεκτρονικοί «φλοιοί» «συντριβούν» κάτω από τις υπερβολικές πιέσεις και ο αστήρ συνεχίσει να συστέλλεται.

Η «συντριβή» των ηλεκτρονικών φλοιών έχει σαν αποτέλεσμα τα ηλεκτρόνια να απομακρύνονται από τα άτομα και να σχηματίζουν ένα εκφυλισμένο νέφος-αέριο ηλεκτρονίων που εξισορροπεί τις πιέσεις μέχρις ότου η πυκνότητα φθάσει στην τιμή των 10^5 gr/cm^3 .

Η στατιστική Fermi ισχύει ακόμα και το αέριο των ηλεκτρονίων δεν έχει γίνει ρελατιβιστικό.

Σ' αυτό ακριβώς το στάδιο βρίσκονται οι λευκοί νάνοι και η κεντρική τους πυκνότητα είναι $10^6 - 10^{8,4} \text{ gr/cm}^3$

Οι ακτίνες τους είναι της τάξεως των $3 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^5 \text{ km}$ και η ακτινοβολία τους προέρχεται από τη συνεχιζόμενη συστολή και από όση ενέργεια απέμεινε από τις πυρηνικές καύσης.

Υπερκαινοφανείς αστέρες (Supernovae)

Ο μηχανισμός δημιουργίας ενός υπερκαινοφανούς

Σε ένα αστέρι που έχει μάζα μεταξύ 1,4 και 3,2 μάζες Ηλίου, και έχει ήδη περάσει από τη φάση καύσης του ηλίου (φάση γιγάντων)*, η θερμοκρασία στον πυρήνα του —λόγω της βαρυτικής συστολής του— μπορεί να ανέβει στους 10^9 K . Με τον τρόπο αυτό αρχίζει η καύση του άνθρακα που έχει συσσωρευτεί στον πυρήνα του. Στη συνέχεια, μέσω μιας σειράς πυρηνικών αντιδράσεων κατά τη διάρκεια των οποίων συντήκονται ολοένα και βαρύτερα άτομα, θα σχηματιστεί ένας πυρήνας που θα περιέχει μια μεγάλη ποικιλία από βαρείς πυρήνες, ιδιαίτερα όμως άφθονο σίδηρο* (${}_{26}^{56}\text{Fe}$).

* Βλέπε: *Το Σύμπαν που αγάπησα-Εισαγωγή στην Αστροφυσική*, Μάνος Δανέζης και Στράτος Θεοδοσίου, Εκδόσεις Δίαυλος, Αθήνα 1999.

Τελικά, όταν ο πυρήνας του άστρου περιέχει μόνο αδρανή σίδηρο, το άστρο θα αρχίσει να καταρρέει προς τον πυρήνα του, αφού δεν υπάρχουν περαιτέρω πηγές θερμότητας και πίεσης για να αντισταθμίσουν τις δυνάμεις βαρύτητάς του. Η βαρυτική αυτή κατάρρευση παρασύρει τις επιφανειακές στιβάδες, με αποτέλεσμα ελαφρά στοιχεία να φτάσουν στον υπέρθερμο πυρήνα του άστρου δημιουργώντας ένα πλήθος νέων πυρηνικών αντιδράσεων.

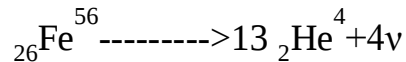
Την περίοδο αυτή γεννιέται και διαδίδεται προς τα έξω ένα κρουστικό κύμα, που προκαλεί μια έκρηξη με αποτέλεσμα την απότομη εκτίναξη μιας μεγάλης ποσότητας ύλης στον μεσοαστρικό χώρο, η οποία δημιουργεί το φαινόμενο του υπερκαινοφανούς (supernova).

Για την εξήγηση αυτής της έκρηξης των υπερκαινοφανών έχουν προταθεί δύο θεωρίες:

Η πρώτη διατυπώθηκε από τον F. Zwicky (1898-1974) και εκφράζει την άποψη ότι ο υπερκαινοφανής οφείλεται στην κατάρρευση ενός αστέρα, που οδεύει στην κατάσταση ενός άστρου νετρονίων, οπότε σχεδόν όλη η δυναμική του ενέργεια ελευθερώνεται αιφνίδια.

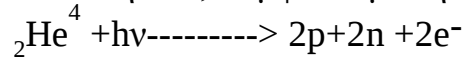
Η δεύτερη οφείλεται στον R. H. Fowler και τους συνεργάτες του. Σύμφωνα με αυτή, μετά την εξάντληση των πηγών πυρηνικής ενέργειας, που ήδη αναφέραμε, ο αστέρας καταρρέει ταχύτατα και η θερμοκρασία του ξεπερνά

τους 8×10^9 Κ. Τότε ο «στείρος» πυρήνας από σίδηρο παράγει ήλιον, σύμφωνα με την αντίδραση:



Δηλαδή στις τεράστιες αυτές θερμοκρασίες ο σίδηρος φωτοδιασπάται από τα φωτόνια υψηλών ενεργειών σε σωματίδια άλφα και νετρόνια και αυτή η αντίδραση προκαλεί την έκρηξη*.

Στη συνέχεια διασπάται και το ήλιον, σύμφωνα με την αντίδραση:



Οι παραπάνω αντιδράσεις απορροφούν ενέργεια και, λόγω αυτού του γεγονότος σταματά η αύξηση της θερμοκρασίας και της πίεσης του πυρήνα. Ταυτόχρονα επιταχύνεται η κατάρρευση (collapse), που διαρκεί μόλις δέκα δευτερόλεπτα.

* Ο σίδηρος διαθέτει τον πιο σταθερό ατομικό πυρήνα, έτσι στις πυρηνικές αντιδράσεις, για να διασπαστεί, όχι μόνον δεν παράγει ενέργεια, αντιθέτως απορροφά. Συνεπώς, η παραπάνω αντίδραση, έντονα ενδόθερμη, απορροφά ενέργεια, η οποία εξασφαλίζεται από την περαιτέρω συστολή του πυρήνα, δηλαδή από απελευθέρωση βαρυτικής ενέργειας. Αυτή γίνεται τόσο απότομα, ώστε επιφέρει ολοκληρωτικές μεταβολές στην επιφάνεια του αστεριού. Η αύξηση της θερμοκρασίας είναι τόσο μεγάλη που η έκρηξη της ύλης γύρω από τον πυρήνα συμπαρασύρει και τα εξωτερικά στρώματα.

Τα παρατηρησιακά δεδομένα

Οι περισσότεροι από τους *υπερκαινοφανείς αστέρες* (supernovae), κατά την περίοδο της εκρηκτικής ανάλαμψής τους μπορούν να αυξήσουν τη φαινόμενη λαμπρότητά τους μέχρι και είκοσι μεγέθη. Όμως ο φυσικός μηχανισμός πρόκλησης του φαινομένου είναι εντελώς διαφορετικός από εκείνον που δημιουργεί έναν καινοφανή αστέρα*.

* Βλέπε το βιβλίο των Μάνου Δανέζη και Στράτου Θεοδοσίου: *Το Σύμπαν που αγάπησα-Εισαγωγή στην Αστροφυσική*, Εκδόσεις Δίαυλος, Αθήνα 1999.

Σημειώνουμε ότι οι εκρήξεις των καινοφανών συνεπάγονται ένα μάλλον μικρής έκτασης φαινόμενο, που αφήνει το σύστημα αναλλοίωτο, έτσι ώστε το φαινόμενο να μπορεί να επαναληφθεί. Αντιθέτως, στην περίπτωση των υπερκαινοφανών η έκρηξη είναι βίαιη και μεγαλειώδης. Ο αστέρας, εκτός ενός μικρού κεντρικού πυρήνα, διαλύεται με τρομακτική δύναμη. Καταστρέφεται δηλαδή ολοκληρωτικά και ανεπιστρεπτί η δομή του. Λόγω αυτής της βίαιης έκρηξης ο αστέρας ακτινοβολεί σε λίγες μόνο ημέρες τόση

ενέργεια, όση έχει ακτινοβολήσει ο Ήλιος μας μέχρι σήμερα. Ο «πρώην» αμυδρός και αόρατος αστέρας γίνεται ορατός με γυμνό μάτι. Το γεγονός αυτό έκανε τους παλαιότερους αστρονόμους να πιστεύουν ότι κάποιο αστέρι γεννιέται, ενώ, στην πραγματικότητα, η βίαιη έκρηξη και η συνεπακόλουθη αύξηση της λαμπρότητάς του ουσιαστικά σηματοδοτούσε το θάνατό του.

Σύγχρονες παρατηρήσεις έδειξαν ότι η μάζα ενός υπερκαινοφανούς αστέρα είναι αρκετά μεγαλύτερη από τη μάζα του Ήλιου μας και το μεγαλύτερο μέρος της εκτοξεύεται στο διάστημα κατά τη στιγμή της έκρηξης. Έτσι ο υπερκαινοφανής αστέρας μπορεί, εκείνη ακριβώς την περίοδο, να γίνει εκατό εκατομμύρια ή ένα δισεκατομμύριο φορές φωτεινότερος από τον Ήλιο! Τα υπολείμματα αυτών των αστρικών εκρήξεων διασκορπίζονται στον μεσοαστρικό χώρο και εμπλουτίζουν με νέα συστατικά, ουσιαστικά με βαρύτερα στοιχεία, το μεσοαστρικό αέριο, από το οποίο σχηματίζονται συνεχώς νέα άστρα. Επιπλέον, οι εκρήξεις αυτές ενεργοποιούν το μεσοαστρικό αέριο και πιθανώς να σχετίζονται με την κοσμική ακτινοβολία, αφού πολλοί αστρονόμοι θεωρούν αυτές ακριβώς τις εκρήξεις ως πιθανή πηγή της.

Επομένως μπορεί οι υπερκαινοφανείς να αποτελούν ένα τέλος, ταυτόχρονα όμως σηματοδοτούν και μια νέα αρχή, αφού διαδραματίζουν έναν σημαντικό ρόλο στο μηχανισμό δημιουργίας νέων άστρων. Αυτό γίνεται όταν τα ωστικά κύματα που παράγονται κατά τις εκρήξεις των υπερκαινοφανών συμπίεζουν το μεσοαστρικό αέριο που τους περιβάλλει. Αυτή ακριβώς η συμπίεση μπορεί να αποτελέσει την αρχή για τη δημιουργία νέων άστρων.

Έχει υπολογιστεί ότι στον Γαλαξία μας, τα τελευταία 2.000 χρόνια έχουν εμφανιστεί και καταγραφεί περίπου δεκατέσσερις υπερκαινοφανείς, ενώ σε άλλους γαλαξίες συνολικά περισσότεροι από εξακόσιους, η λάμψη μάλιστα ορισμένων έφτασε τη λάμψη ολόκληρου του γαλαξία μέσα στον οποίο βρίσκονταν. Ο προσδιορισμός των παλαιότερων από αυτούς γίνεται με εντοπισμό των υπολειμμάτων τους, μέσω ραδιοτηλεσκοπικών παρατηρήσεων. Συνεπώς, με βάση τους παραπάνω αριθμούς, συμπεραίνουμε ότι στον Γαλαξία μας αναλάμπει τουλάχιστον ένας καινοφανής κάθε 140 έτη, και αντίστοιχα σημειώνονται μία ή δύο εκρήξεις υπερκαινοφανών κάθε εκατό χρόνια σε κάθε γαλαξία. Ο I. S. Shklovsky θεωρεί ότι η συχνότητα εμφάνισης υπερκαινοφανών στον Γαλαξία μας πρέπει να είναι μεγαλύτερη και διατύπωσε την άποψη ότι μάλλον αναλάμπει ένας υπερκαινοφανής κάθε τριάντα έτη. Δηλαδή, σύμφωνα με τον Ρώσο αστρονόμο, ανά αιώνα στον Γαλαξία μας εκρήγνυνται τρεις ή τέσσερις υπερκαινοφανείς. Οι ιστορικές όμως καταγραφές, δείχνουν ότι οι παρατηρήσιμες εκρήξεις κοντινών υπερκαινοφανών είναι πιο σπάνιες και συμβαίνουν —κατά μέσο όρο— μία μόνον φορά κάθε τριακόσια χρόνια περίπου.

Επανερχόμενοι στη μελέτη της φύσης και των αστρικών διεργασιών που συμβαίνουν σ' έναν υπερκαινοφανή, σημειώνουμε ότι το 99% της όλης ενέργειας που εκλύεται κατά τη βίαιη έκρηξη, μάλλον διαδίδεται μέσω της έκλυσης νετρίνο, ενώ η υπόλοιπη εμφανίζεται ως εκπομπή ακτίνων Χ, ακτίνων γ και ως κινητική ενέργεια διαστολής των αερίων κελυφών. Η μελέτη όλων των προηγούμενων στοιχείων πιστεύουμε ότι στο άμεσο μέλλον θα δώσει κάποιες τελικές απαντήσεις στο πολύ σημαντικό ερώτημα του αιτίου που προκαλεί τη βίαιη έκρηξη.

Ο αστρονομικός δορυφόρος GRO (Gamma Ray Observatory), το *Παρατηρητήριο Ακτίνων Γάμα*, που στάλθηκε στο διάστημα το 1991 και προβλέπεται να εκτελεί παρατηρήσεις μέχρι τουλάχιστον το 2005, θα μελετήσει τις ακτίνες γ που προέρχονται από τους υπερκαινοφανείς. Αυτές οι παρατηρήσεις θα δώσουν απαντήσεις για την ποιότητα των χημικών στοιχείων που σχηματίζονται κατά την έκρηξη ενός υπερκαινοφανούς. Επιπλέον, η ανάλυση της αφθονίας τους θα μας δώσει πλήθος πληροφοριών για τις αστρικές διεργασίες που συντελούνται στο εσωτερικό τους. Όμως, δεν αρκεί μόνο αυτό. Έτσι, οι επιστήμονες αναμένουν πολλά από τον δορυφόρο NAE (Nuclear Astrophysical Explore) και τον *Εξερευνητή Πυρηνικής Αστροφυσικής*, που είναι ο πιο σύγχρονος ανιχνευτής ακτίνων γ. Σαρώνοντας συνεχώς τον ουρανό μπορεί να μετρά μήκη κύματος ακτινοβολίας γ με ακρίβεια 0,1%. Συνεπώς, έχοντας τη δυνατότητα αναγνώρισης των ατόμων στα οποία οφείλεται η εκπομπή ακτίνων γ, θα μας παρέχει διαρκώς πολύτιμες πληροφορίες.

Όσον αφορά τη μελέτη των ακτίνων Χ που εκπέμπονται από τους υπερκαινοφανείς, παίρνουμε σημαντικότερες πληροφορίες από τον αστρονομικό δορυφόρο AXAF (Advanced X-ray Astrophysics Facility), το *Προηγμένο Αστροφυσικό Παρατηρητήριο Ακτίνων Χ*, που εκτοξεύτηκε το 1998 και θα στέλνει τις πολύτιμες πληροφορίες του τουλάχιστον μέχρι το 2013.

Συγχρόνως, η εκπομπή ακτίνων στο υπεριώδες θα μελετηθεί από τους δορυφόρους EUVE (Extreme Ultraviolet Explorer), τον *Εξερευνητή Απώτατου Υπεριώδους*, καθώς και από τον FUSE (Far Ultraviolet Spectroscopic Explorer), τον *Εξερευνητή Φασματοσκοπίας Μακρινού Υπεριώδους*.

Τέλος, επειδή τα χημικά στοιχεία που σχηματίζονται στους υπερκαινοφανείς και διασκορπίζονται στο διάστημα εμπλουτίζοντάς το μπορούν να αναγνωριστούν και από παρατηρήσεις στο υπέρυθρο, σημαντικές θα είναι και οι πληροφορίες από το αερομεταφερόμενο παρατηρητήριο SOFIA (Stratospheric Observatory for Far-Infrared Astronomy), το *Στρατοσφαιρικό Παρατηρητήριο Αστρονομίας Υπέρυθρου* (1997-2017). Τέλος, στάλθηκε στο διάστημα το 2000 και θα στέλνει παρατηρήσεις τουλάχιστον μέχρι το 2005 το SIRTf (Space Infrared Telescope Facility), το *Διαστημικό Τηλεσκόπιο*

Υπερύθρου. Υπολογίζεται ότι, χάρη στις βελτιωμένες τεχνικές κατασκευής του και στα προηγμένα τεχνολογικά όργανα που μεταφέρει, μπορεί να καταγράφει υπέρυθρη ακτινοβολία από υπερκαινοφανείς, που θα βρίσκονται ακόμη και στις τεράστιες αποστάσεις των 30×10^6 ετών φωτός!

Κοσμολογική σημασία των Υπερκαινοφανών

Η ερευνητική ομάδα των C. J. Hogan, R. P. Kirshner και N. B. Suntzeff συλλέγοντας παρατηρήσεις δεδομένων για υπερκαινοφανείς από τηλεσκόπια της Αυστραλίας, της Χιλής, των Η.Π.Α. αλλά και από το διαστημικό τηλεσκόπιο Hubble, διαπίστωσαν ότι οι μακρινοί υπερκαινοφανείς ήταν αμυδρότεροι κατά 25% από το αναμενόμενο. Το γεγονός αυτό ήταν πολύ ενδιαφέρον, εφόσον θα μπορούσε να οδηγήσει στην απόρριψη πολλών κοσμολογικών θεωριών.

Αρχικά, προκειμένου να ερμηνευθεί το φαινόμενο με βάση τις γνωστές αστρονομικές γνώσεις, διατυπώθηκαν οι δύο επόμενες απόψεις:

1. Σαν ένα πρώτο αίτιο θα μπορούσε να αναφερθεί η κοσμική σκόνη, η οποία έχει τη δυνατότητα να εμποδίζει μέρος του φωτός να φτάσει μέχρι εμάς. Η άποψη αυτή όμως απορρίφθηκε εφόσον οι κόκκοι της σκόνης έπρεπε να αποκόπτουν τις κυανές ακτινοβολίες κάνοντας τους υπερκαινοφανείς να φαίνονται πιο κόκκινοι, κάτι το οποίο δεν επιβεβαιώθηκε. Εξάλλου το γεγονός ότι όλοι οι υπερκαινοφανείς φαίνονται κατά 25% αμυδρότεροι οδηγούσε στο συμπέρασμα ότι, αν το αίτιο ήταν η κοσμική σκόνη, αυτή θα έπρεπε να ήταν κατανομημένη ομοιόμορφα μέσα στο Σύμπαν, το οποίο όμως δεν ευσταθούσε.

2. Ένας δεύτερος λόγος θα μπορούσε να είναι η ύπαρξη βαρυτικών φακών οι οποίοι θεωρητικά μπορούν να προκαλέσουν αύξηση ή ελάττωση της λαμπρότητας των υπερκαινοφανών. Στην πραγματικότητα όμως, τα βαρυτικά αυτά φαινόμενα έχουν κάποια πρακτική επίδραση στις παρατηρήσεις, μόνο στην περίπτωση που οι υπερκαινοφανείς βρίσκονταν σε πολύ μεγαλύτερες αποστάσεις από όσες μελέτησε η ερευνητική ομάδα. Για το λόγο τούτο αποκλείστηκε και αυτή η αιτιολογία.

Οι κοσμολογικές ερμηνείες του φαινομένου

Απορρίπτοντας όμως τις προηγούμενες κλασικές φυσικές ερμηνείες του φαινομένου της μείωσης της λαμπρότητας των μακρινών υπερκαινοφανών, δεν απομένει παρά να εξετάσουμε αν αυτή έχει ως αιτία την ίδια τη δομή του Σύμπαντος, δηλαδή τις επιμέρους ιδιότητες του συμπαντικού χώρου και χρόνου.

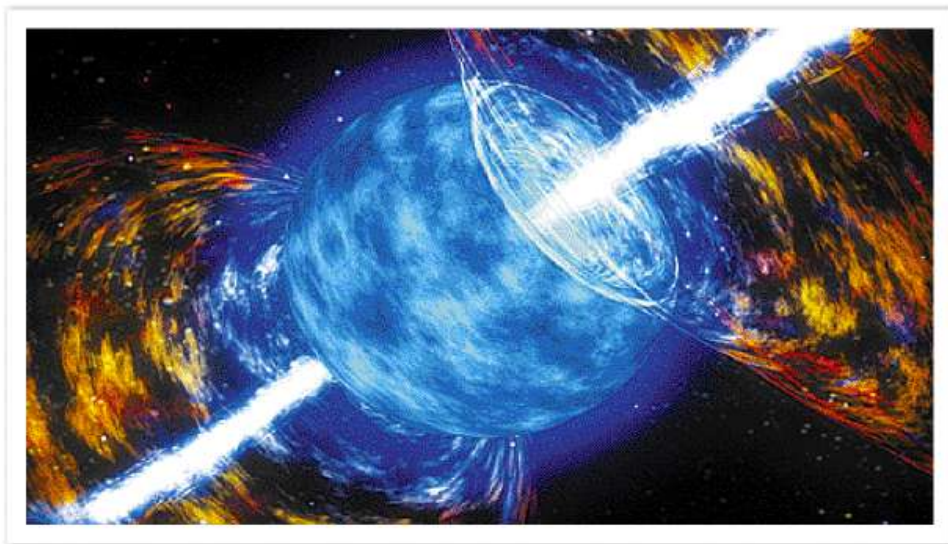
Ας δούμε πιο αναλυτικά το πρόβλημα:

1. Ο υπολογισμός της πραγματικής λαμπρότητας των μακρινών υπερκαινοφανών έγινε υποθέτοντας πως το Σύμπαν είναι επίπεδο, δηλαδή ότι ίσχυε η Ευκλείδεια γεωμετρία. Στην περίπτωση αυτή οι σφαίρες φωτός γύρω από έναν υπερκαινοφανή θα ήταν Ευκλείδειες. Αν όμως η γεωμετρία του χώρου ήταν *Lobatschewski*, δηλαδή αρνητικής καμπυλότητας, τότε οι αντίστοιχες σφαίρες φωτός θα παρουσίαζαν πολύ μεγαλύτερες επιφάνειες, γεγονός που θα έκανε τους υπερκαινοφανείς να φαίνονται αμυδρότεροι. Όπως είναι φανερό το ποσοστό μείωσης της έντασης του συλλεγόμενου φωτός, θα αποτελούσε ένα μέτρο της αρνητικής καμπυλότητας του συμπαντικού χώρου.

2. Σύμφωνα με μια δεύτερη θεώρηση, η μείωση της πραγματικής λαμπρότητας των πολύ μακρινών υπερκαινοφανών οφείλεται στο γεγονός ότι βρίσκονται σε πολύ μεγαλύτερη απόσταση από αυτή η οποία υπολογίζεται από τη μετατόπιση των φασματικών γραμμών τους (βλέπε σελίδα...). Για να συμβαίνει όμως αυτό θα πρέπει να υποθέσουμε ότι το Σύμπαν στο παρελθόν διαστελλόταν πολύ πιο αργά από ό,τι αναμέναμε, κάτι που θα σήμαινε ότι η συνολική διαστολή του χώρου και του μήκους κύματος του φωτός που ταξιδεύει μέσα σ' αυτό, θα ήταν πολύ μικρότερη από εκείνη που περιμέναμε. Ποια είναι η σημασία όλων των προηγούμενων; Αν το Σύμπαν είναι κατασκευασμένο μόνο από το υλικό που όλοι γνωρίζουμε, η βαρύτητα έπρεπε να επιβραδύνει συνεχώς την ταχύτητα διαστολής. Η μειωμένη επιβράδυνση, σε σχέση με την αναμενόμενη ταχύτητα διαστολής, όπως αυτή υπολογίζεται από τη μέτρηση των μακρινών υπερκαινοφανών, σημαίνει ότι η συνολική πυκνότητα της ύλης του Σύμπαντος είναι μικρότερη από την αναμενόμενη. Επειδή όμως, σύμφωνα με τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, η πυκνότητα της ύλης του Σύμπαντος συνδέεται με την καμπυλότητα του χώρου και την επιβράδυνση της διαστολής, μικρή πυκνότητα ύλης σημαίνει αρνητική καμπυλότητα και μικρή επιβράδυνση.

Η αρνητική καμπυλότητα και η αυξημένη επιβράδυνση προκαλούν μείωση της φαινόμενης λαμπρότητας των υπερκαινοφανών, ενώ παίρνουν, θεωρητικά, τη μέγιστη τιμή τους όταν το Σύμπαν είναι «άδειο» (πυκνότητα μηδέν). Το μεγάλο πρόβλημα, λοιπόν, δημιουργήθηκε από το γεγονός ότι οι τιμές μείωσης της φαινόμενης λαμπρότητας των υπερκαινοφανών οδηγούν σε τιμές αρνητικής καμπυλότητας και επιβράδυνσης πολύ μεγαλύτερης από τη μέγιστη που αντιστοιχεί στην περίπτωση του «άδειου» Σύμπαντος. Αυτό σημαίνει ότι, πέραν του ανώτατου αυτού ορίου, δεν μπορούμε να μιλάμε για τιμές επιβράδυνσης αλλά επιτάχυνσης. Δηλαδή η διαστολή του Σύμπαντος αντί να επιβραδύνεται, λόγω των ελκτικών δυνάμεων της βαρύτητας, επιταχύνεται, γεγονός παράδοξο αν θεωρήσουμε ότι η βαρύτητα του γνωστού συμπαντικού υλικού είναι μόνο ελκτική. Σύμφωνα με τη θεωρία των Αϊνστάιν όμως, η διαστολή του Σύμπαντος μπορεί να επιταχύνεται μόνο αν το Σύμπαν

είναι γεμάτο από μια εξωτική μορφή ενέργειας, την ενέργεια του κενού (βλέπε σελίδα...). Η περίεργη αυτή ενέργεια είναι ενσωματωμένη στην κοσμολογική σταθερά και πρακτικά προσθέτει στη βαρύτητα μια απωστική συνιστώσα (βλέπε σελίδα...). Με την εισαγωγή αυτής της συνιστώσας και αναλόγως της τιμής της, η διαστολή του Σύμπαντος μπορεί να επιταχυνθεί.



Άστρα νετρονίων (Neutron Stars)

Εισαγωγή

Αν η μάζα του άστρου που απομένει μετά την έκρηξη ενός υπερκαινοφανούς είναι μεταξύ 1,4 και 3,2 ηλιακών μαζών ($1,4M_{\odot} < M < 3,2M_{\odot}$), τότε:

α) Παρά την έκρηξη του εξωτερικού περιβλήματος του αστεριού, λόγω αντίδρασης, το κεντρικό του τμήμα συνεχίζει να συστέλλεται.

β) Η βιαιότητα της έκρηξης συμπιέζει την εναπομένονσα ύλη του αστερά τόσο πολύ, ώστε τελικά η ύλη συνθλίβεται και καταλήγει σε μια τελική πυκνότητα πολύ μεγαλύτερη από την πυκνότητα των λευκών νάνων, δηλαδή της τάξεως των 10^{12} - 10^{14} gr/cm³. Στη φάση αυτή τα ελεύθερα ηλεκτρόνια επιταχύνονται σε σχετικιστικές ταχύτητες και εξαναγκάζονται να ενωθούν με τα πρωτόνια, οπότε στους πυρήνες σχηματίζονται νετρόνια.

Στην κατάσταση αυτή, η ύλη δεν μπορεί να συμπιεστεί άλλο και αποτελείται από ένα εκφυλισμένο αέριο νετρονίων*, η πίεση του οποίου ισορροπεί τις δυνάμεις βαρύτητας.

* Εκφυλισμένο αέριο είναι εκείνο το οποίο δεν υπακούει στους νόμους των τελείων αερίων.

Τα Νετρόνια είναι υπατομικά σωματίδια με μάζα ηρεμίας λίγο μεγαλύτερη από τα πρωτόνια και χωρίς ηλεκτρικό φορτίο.

Το άστρο είναι πια ένα *αστέρι νετρονίων* με διάμετρο 10-30 Km και μάζα ίση με 1-3 ηλιακές μάζες.

Ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά αυτών των αστεριών είναι η ταχύτατη περιστροφή τους, που καθεμιά ολοκληρώνεται σε χιλιοστά του δευτερολέπτου.

Ενδιαφέρον εξάλλου παρουσιάζει το αυξημένο μαγνητικό πεδίο τους, που συνήθως γίνεται τρισεκατομμύρια φορές ισχυρότερο από το μαγνητικό πεδίο της Γης και παράγει περιοδικούς παλμούς ισχυρών ραδιοκυμάτων. Οι αστέρες αυτοί, εφόσον τα νετρόνια που τους αποτελούν δεν μπορούν να συμπιεστούν παραπάνω, ανθίστανται σε περαιτέρω βαρυτική κατάρρευση. Συνεπώς οι αστέρες νετρονίων θεωρητικά θα παραμείνουν στη σταθερή τους ισορροπία για πάντα. Ουσιαστικά όμως, τα νεκρά αυτά άστρα, εφόσον δεν διαθέτουν άλλη πηγή ενέργειας εκτός από την περιστροφή τους, τελικά θα ψυχθούν και στη συνέχεια θα σβήσουν εντελώς.

Η ύπαρξη των αστερών νετρονίων είχε προβλεφθεί θεωρητικά το 1930. Για πολλά χρόνια όμως δεν είχαν παρατηρηθεί τέτοια ουράνια σώματα.

Τελικά η ανακάλυψη των *pulsars* (**pulsating radio sources**), το 1967, δικαίωσε την υπόθεση ύπαρξής τους.

Αξίζει όμως να δούμε αναλυτικότερα τα παράξενα αυτά άστρα.

Οι αστέρες νετρονίων*

*Για περισσότερες λεπτομέρειες βλέπε: *Το Σύμπαν που αγάπησα-Εισαγωγή στην Αστροφυσική*, Μάνος Δανέζης και Στράτος Θεοδοσίου, Εκδόσεις Διάυλος, Αθήνα 1999

Για την ύπαρξη αστέρων νετρονίων, πρώτοι έκαναν λόγο, στη δεκαετία του '30, δύο νεαροί τότε Αμερικανοί αστρονόμοι, ο γερμανικής καταγωγής Βάλτερ Μπάαντε (Walter Baade, 1893-1960) και ο ελβετικής καταγωγής Φριτς Ζβίκι (Fritz Zwicky, 1898-1974) σε ένα άρθρο τους που δημοσίευσαν το 1934 —μόλις δύο χρόνια μετά τον πειραματικό εντοπισμό του νετρονίου από το Σερ Τζέιμς Τσάντγουικ (Sir J. Chadwick). Στο άρθρο αυτό έγραφαν: «...διατυπώνουμε την άποψη ότι ένας υπερκαινοφανής αντιπροσωπεύει μια ενδιάμεση κατάσταση που περνάει ένας κανονικός αστέρας, μέχρι να καταλήξει σε ένα αστέρι που θα συγκροτείται κυρίως από νετρόνια».

Η άποψη αυτή, όπως και άλλες μεγάλες ανακαλύψεις, συνάντησε, αρχικά, το χλευασμό της επιστημονικής κοινότητας εκείνης της εποχής, επειδή ήταν εντελώς αντίθετη με τις τότε κρατούσες επιστημονικές θέσεις. Ένας τέτοιος αστέρας θα έπρεπε να είναι κατά 100.000 φορές μικρότερος από έναν κανονικό αστέρα και αν είχε μάζα λίγο μεγαλύτερη από τον Ήλιο, θα έπρεπε να έχει διάμετρο μόνο 16 χιλιόμετρα, ενώ η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνειά του θα ήταν τόσο μεγάλη, ώστε κάθε σώμα θα ζύγιζε 100 δισεκατομμύρια φορές περισσότερο απ' ό,τι στη Γη. Όλα τα προηγούμενα φάνταζαν αδύνατα για την κοινή λογική και έκαναν απίστευτη τη σκέψη ύπαρξης των αστέρων νετρονίων.

Ας δώσουμε όμως μ' ένα απλό παράδειγμα τις διαστάσεις αυτών των ουρανίων σωμάτων. Αν ένας ερυθρός γίγαντας αντιστοιχεί σε μια μπάλα του τένις, τότε ο Ήλιος μας αντίστοιχα είναι ίσος με το κεφάλι μιας καρφίτσας. Αν ο Ήλιος μας είναι η μπάλα του τένις, τότε το κεφάλι της καρφίτσας αντιστοιχεί στον λευκό νάνο. Αν ο λευκός νάνος είναι ίσος με την μπάλα του τένις, τότε ο αστέρας νετρονίων θα αντιστοιχεί στο κεφάλι της καρφίτσας.

Στην αρχή ελάχιστοι αστρονόμοι αντιμετώπισαν με σοβαρότητα την υπόθεση ύπαρξης των ιδιόμορφων αυτών άστρων. Ένας ήταν ο Ρωσοαμερικανός φυσικός Τζωρτζ Γκεϊμάους ή Γκάμοφ (George Gamov, 1904-1968), ο οποίος το 1937 απέδειξε ότι η διάμετρος ενός αστέρα νετρονίων, του οποίου η μάζα είναι όση περίπου η μάζα του Ήλιου μας, θα ήταν μόνο δέκα χιλιόμετρα. Θεωρητικά βέβαια, μετά από υπολογισμούς, απέδειξαν τη δυνατότητα ύπαρξης των αστέρων νετρονίων και οι Landau, Oppenheimer και Volkoff.

Όμως, παρά τις συνεχείς προσπάθειες των παρατηρητών αστρονόμων οι αστέρες νετρονίων παρέμεναν μια απλή θεωρητική υπόθεση μέχρι το 1967. Τότε η Αγγλίδα αστρονόμος Susan Jocelyn Bell (1943-), σήμερα κυρία

Burnell και επικεφαλής του Open University στο Milton Keynes, δουλεύοντας στο ραδιοτηλεσκόπιο του Cambridge —προκειμένου να ολοκληρώσει τη διδακτορική της διατριβή—, ανακάλυψε την πρώτη παλλόμενη ραδιοπηγή στον αστερισμό της Αλώπεκος (Vulpecula). Τα λαμβανόμενα σήματα από αυτή τη ραδιοπηγή ήταν μια σειρά παλμών διάρκειας 0,3 του δευτερολέπτου, που επαναλαμβάνονταν κάθε 1,337 δευτερόλεπτα. Η ραδιοπηγή αυτή κωδικοποιήθηκε ως CP1919 και η συστηματική παρακολούθηση των παλμών της έδειξε ότι η περίοδός τους ήταν 1,33730109 δευτερόλεπτα, με πιθανό σφάλμα ένα εκατοντάκις του εκατομμυριοστού του δευτερολέπτου.

Στη συνέχεια ανακαλύφθηκαν άλλες τρεις παρόμοιες ραδιοπηγές, με περιόδους 1,2737642 δευτερόλεπτα, 0,253065 δευτερόλεπτα και 1,18790928 δευτερόλεπτα.

Τα νέα αυτά ουράνια σώματα προβλημάτισαν πολλούς αστρονόμους, αλλά όλοι συμφώνησαν ότι οι περιοδικοί ραδιοπαλμοί των ανακαλυφθέντων άστρων ήταν αποτέλεσμα μιας επαναλαμβανόμενης διαστολής και συστολής τους. Για τον λόγο αυτό μάλιστα ονομάστηκαν *Pulsars* δηλαδή *παλλόμενες ραδιοπηγές* (Pulsars= **Pulsating radio sources**)*. Για την ανακάλυψη των Pulsars τιμήθηκαν με το βραβείο Νόμπελ, τον Οκτώβριο του 1974, ο υπεύθυνος του προγράμματος της S. J. Bell, Antony Hewish (1924-) καθώς και ο διευθυντής του Ραδιοαστρονομικού σταθμού *Sir Martin Ryle* (1918-1984) για τις εν γένει σημαντικές έρευνές του και την αξιόλογη προσφορά του στη Ραδιοαστρονομία, ενώ αποσιωπήθηκε η προσφορά της Susan Bell. Το γεγονός αυτό εξόργισε πολλούς αστρονόμους, μεταξύ των οποίων και τον διάσημο βρετανό κοσμολόγο *Sir Fred Hoyle* (1915-2001), ο οποίος εξέφρασε την αγανάκτησή του με επιστολή του που δημοσιεύθηκε στους *Τάιμς* του Λονδίνου.

Κύριο χαρακτηριστικό των pulsars είναι η σταθερότητα της περιόδου των παλμών που λαμβάνονται με πολύ μεγάλη ακρίβεια. Ως παράδειγμα αναφέρουμε τον pulsar CP0328 ο οποίος έχει περίοδο 0,714518603 δευτερόλεπτα, ενώ οι περίοδοι των περισσότερων pulsars κυμαίνονται μεταξύ 0,03 και 3 δευτερολέπτων. Όμως κανένα ουράνιο σώμα δεν θα μπορούσε να περιστρέφεται τόσο γρήγορα —χωρίς να διαλυθεί—, εκτός κι αν είχε το πολύ μικρό μέγεθος ενός αστέρα νετρονίων. Συνεπώς η πυκνότητα των pulsars έπρεπε να είναι της τάξεως των 10^{11} - 10^{14} gr/cm³ και βέβαια, στις τεράστιες αυτές πυκνότητες, τα πρωτόνια και τα ηλεκτρόνια είναι υπό μορφή νετρονίων. Γι' αυτό οι pulsars έπρεπε να είναι και αστέρες νετρονίων.

Η άποψη του A. Hewish για την παλλόμενη φύση των pulsars καταρρίφθηκε το 1968 από τον αστρονόμο του Πανεπιστημίου του Κορνέλ Τόμας Γκολντ (Thomas Gold, 1920-). Ο T. Gold απέδειξε ότι οι pulsars είναι *μαγνητικοί αστέρες νετρονίων*, που *περιστρέφονται ταχύτατα γύρω από τον άξονά τους*

εκπέμποντας μια στενή δέσμη ραδιοσημάτων, πράγμα που επιβεβαιώθηκε από τις παρατηρήσεις.

* Ουσιαστικά και ο ένας απ' αυτούς τους ιδιόμορφους αστέρες πρέπει να καλείται pulsars=**Pulsating radio source**. Συνεπώς ίδια λέξη και για τον έναν και για τους πολλούς, ασχέτως αν γενικώς χρησιμοποιούμε τον όρο pulsar στον ενικό αριθμό, για τον έναν.

Σύμφωνα με την άποψη του T. Gold (1968), αλλά και των Goldreich και Julian (1969), λόγω των συνθηκών που επικρατούν στα άστρα αυτά, τα φορτισμένα σωματίδια τα οποία βρίσκονται στην επιφάνειά τους, επιταχύνονται φτάνοντας σε ταχύτητες που προσεγγίζουν την ταχύτητα του φωτός. Με αυτό τον τρόπο αναγκάζονται να συγκεντρωθούν, με τη μορφή στενής δέσμης, στους μαγνητικούς πόλους του άστρου. Στις περιοχές αυτές, η ενέργειά τους μετατρέπεται σε ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία και, στην περίπτωση που οι μαγνητικοί πόλοι δεν συμπίπτουν με τα άκρα του άξονα περιστροφής τού pulsar, η φωτεινή ακτινοβολία που εκπέμπεται από τις περιοχές κοντά στον βόρειο και στον νότιο μαγνητικό πόλο, σαρώνει το διάστημα σαν φάρος, αφού ένα τέτοιο ουράνιο σώμα μπορεί γενικά να εκπέμψει μια περιστρεφόμενη δέσμη φωτονίων. Αν η Γη βρεθεί στο δρόμο της μιας από τις δύο φωτεινές αυτές δέσμες, οι ραδιοαστρονόμοι θα παρατηρούν και θα συλλαμβάνουν μια σειρά φωτεινών παλμών —που θα εκπέμπονται σε κανονικά χρονικά διαστήματα— κάθε φορά που η δέσμη περνά από το μέτωπο που κατευθύνεται προς τη Γη.

Συνεπώς, ο pulsar είναι ένα είδος φάρου, που περιστρέφεται ταχύτατα και περιοδικά μάς στέλνει φωτεινές αναλαμπές.

Στη συνέχεια ανακαλύπτονταν συνεχώς καινούργιοι pulsars, όπως αυτός στο κέντρο του νεφελώματος NGC 1952 (M1), γνωστός ως Νεφέλωμα Καρκίνος (Crab Nebula), που εντοπίστηκε το 1968 και πιστεύεται ότι είναι υπόλειμμα από την έκρηξη του λαμπρού υπερκαινοφανούς τον οποίο είχαν καταγράψει οι Κινέζοι στα *Χρονικά της Σινίκης* το 1054 μ.Χ. Ο pulsar αυτός, γνωστός με την κωδική ονομασία NP 0532, ακτινοβολεί και στο ορατό, με περίοδο 0,033 δευτερολέπτων —με αύξηση κατά 0,000000037 sec/day— και έτσι είναι δυνατόν να φωτογραφηθεί στο μέγιστο και στο ελάχιστο της λαμπρότητάς του.

Ο εν λόγω pulsar θεωρείται πολύ νέος αστέρας—στο στάδιο αυτό είναι ηλικίας μόλις 950 ετών—και έτσι έχει μικρή περίοδο, ενώ οι γηραιότεροι pulsars έχουν μεγαλύτερες περιόδους. Αυτό υποδηλώνει την αμοιβαία επίδραση ανάμεσα στην ενέργεια που εκπέμπεται από τους pulsars και στο αστρικό μαγνητικό πεδίο, με άμεσο αποτέλεσμα να επιβραδύνεται η

περιστροφή τους και οι περίοδοί τους βαθμιαία να αυξάνουν. Συνήθως παρατηρείται αύξηση ενός μικροδευτερολέπτου (10^{-6} second) ανά μήνα.

Από το 1968 μέχρι σήμερα έχουν ανακαλυφθεί περισσότεροι από 420 pulsars. Το 1987 ανακαλύφθηκε στο σφαιρωτό σμήνος M4 —σε απόσταση 6.800 ε.φ., ο ταχύτερα περιστρεφόμενος pulsar, με 600 περίπου περιστροφές το δευτερόλεπτο.

Σημειώνουμε ότι οι pulsars είναι συγχρόνως και πηγές ακτίνων X.

Κάποιοι γηραιοί pulsars εκπέμπουν έντονη ραδιοακτινοβολία. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το έντονο μαγνητικό πεδίο ενός pulsar, σε συνδυασμό με την περιστροφή του, επιταχύνει ηλεκτρόνια σε πολύ μεγάλες ταχύτητες με αποτέλεσμα την εκπομπή ραδιοακτινοβολίας. Αυτοί είναι pulsars πολύ μεγάλης ηλικίας που, συν τω χρόνω, έχασαν πολλή ενέργεια και έτσι δεν ακτινοβολούν πια στα μήκη κύματος του ορατού ούτε και της ακτινοβολίας X. Εκπέμπουν στα ραδιοφωνικά μήκη κύματος και η περίοδός τους είναι ένα δευτερόλεπτο ή και περισσότερο.

Οι pulsars έχουν μάζες μεγαλύτερες από την ηλιακή, οι διάμετροί τους όμως κυμαίνονται μεταξύ 10 και 20 Km. Οι ραδιοαστρονόμοι, από καταγραφές της ακτινοβολίας των pulsars σε διάφορα μήκη κύματος, ανακάλυψαν κάποιες διαφορές στο χρόνο άφιξής τους. Αν υποθέσουμε ότι ένας pulsar εκπέμπει ταυτόχρονα ενέργεια σε διαφορετικά μήκη κύματος, η επιβράδυνση —που παρατηρείται στο χρόνο άφιξης εκάστης ακτινοβολίας— οφείλεται στη διαφορά του «δείκτη διάθλασης» του μεσοαστρικού μέσου στα διάφορα μήκη κύματος. Το φαινόμενο αυτό οφείλεται μάλλον στα ελεύθερα ηλεκτρόνια του μεσοαστρικού χώρου. Αν είναι γνωστή η πυκνότητα των ηλεκτρονίων, τότε μπορεί να υπολογιστεί η απόσταση των pulsars από την παρατηρούμενη επιβράδυνση των παλμών στα διάφορα μήκη κύματος. Γενικώς οι αποστάσεις των pulsars εκτιμήθηκαν μεταξύ 200-300 pc, ενώ σε ακραίες περιπτώσεις έφτασαν και σε χιλιάδες parsecs.

Συνοπτικά, θα πρέπει να αναφερθεί ότι οι αστέρες νετρονίων είναι μαγνητικοί αστέρες, τεράστιας πυκνότητας (10^{12} - 10^{14} gr/cm³), με μάζες λίγο μεγαλύτερες από την ηλιακή, με διαμέτρους μεταξύ 10-20 Km, που περιστρέφονται ταχύτατα γύρω από τον άξονά τους εκπέμποντας μια στενή δέσμη ραδιοσημάτων.

Η δομή των αστέρων νετρονίων

Όταν ένα άστρο καταρρέει και γίνεται λευκός νάνος η μάζα του κάτω από την επίδραση της βαρύτητός του έλκεται με συνέπεια ο αστέρας να συνεχίζει να συστέλλεται και η πυκνότης του να αυξάνει.

Έτσι όσο πιο μαζικός είναι ο αστέρας τόσο εντονότερα συρρικνώνεται και τόσο μεγαλύτερη πυκνότητα αποκτά στην κατάσταση ισορροπίας του δηλαδή στην κατάσταση εκείνη του εσωτερικού του αστέρος όπου οι δυνάμεις οι οφειλόμενες στο εκφυλισμένο ηλεκτρονικό «ρευστό» του εξισορροπούν τις δυνάμεις βαρύτητας. Είναι λογικό τό ότι όσο πιο πυκνό το «ρευστό» τόσο μεγαλύτερες δυνάμεις βαρύτητας μπορεί να εξισορροπήσει. Αλλά η αύξηση της πυκνότητας συνεπάγεται από συστολή του αστέρος πράγμα που μας οδηγεί στο ότι όσο μεγαλύτερη πυκνότητα έχει ένας λευκός νάνος τόσο μικρότερος θα είναι σε διαστάσεις. Τότε πόσο μαζικός και πόσο μικρός μπορεί να είναι ένας λευκός νάνος.

Ο ινδο-αμερικανός αστρονόμος Subrahmanyan Chandrasekhar στα 1931, βασισμένος σε μερικές προηγούμενες εργασίες των Milne και Stoner οι οποίοι είχαν αποδείξει ότι υπάρχουν συνθήκες κεντρικής πυκνότητας και θερμοκρασίας στους αστέρες και πιο συγκεκριμένα στους λευκούς νάνους που πέρα απ' αυτές η στατιστική του εκφυλισμένου αλλά ακόμα όχι ρελατιβιστικού ηλεκτρονικού «ρευστού» του Fermi Dirac παύει να ισχύει, κατόρθωσε να αποδείξει ότι υπάρχει μια μέγιστη πυκνότητα και μια κρίσιμη μάζα που αποτελεί ένα άνω όριο για τη μάζα ενός αστέρος ώστε ο αστέρας να καταλήξει με ασφάλεια συστελλόμενος σε λευκό νάνο. Υπελόγισε αυτήν την κρίσιμη μάζα σε $M \simeq 1,4M_{\odot}$ όπου $M_{\text{κρ}}$ η κρίσιμη μάζα και $M_{\odot}$ η μάζα του ήλιου.

Πράγματι αν ξεκινήσουμε από την 4-βάθμια εξίσωση του Eddington για την χαρακτηριστική «Λαμπρότητα Eddington» ενός αστέρος έχουμε:

$$1 - \beta_o = 0,00309 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 \alpha^4 \beta_o^4$$

όπου $\beta_o = 1 - \frac{kL}{4\pi cGM}$

και L_o η Λαμπρότης Eddington

α το μέσο μοριακό βάρος των στοιχείων του αστέρος σε μονάδες μάζας ατόμου υδρογόνου $m_H^{-1} \left(a = \frac{\mu}{m_H} \right)$ με το μέσο μοριακό βάρος

M η μάζα του αστέρος

$M_{\odot}$ η μάζα του ηλίου

G η σταθερά βαρύτητας και ο συντελεστής β_o που δείχνει τον λόγο της μέσης πίεσης στο άπειρο ως προς τη μέση πίεση ιδοδυνάμου ιδανικού αερίου\

$$p_o = \beta_o \mathcal{P}$$

όπου p η πίεση του άστρου $\mathcal{P}$ η πίεση ιδανικού αερίου και k ο συντελεστής διαφάνειας της ύλης του αστερός.

Γνωρίζουμε ότι η λαμπρότητα Eddington είναι χαρακτηριστική για τον αστερά. Επίσης ότι ο συντελεστής β όπως ορίστηκε προηγουμένως μπορεί να ορισθεί και για οποιαδήποτε άλλη περίπτωση λαμπρότητα σαν :

$$\beta_o = 1 - \frac{kL}{4\pi cGM} \text{ και } p = \beta \mathcal{P}$$

και ότι η σχέση μεταξύ των συντελεστών $\beta_{condensed}$ για ένα κεντρικά συμπυκνωμένο (centrally condensed), β_{col} για ένα άστρο που έχει υποστεί κατάρρευση (collapse) και του β_o της λαμπρότητας Eddington είναι:

$$\beta_{cond.} < \beta_o < \beta_{col.}$$

τότε συγκρίνοντας αστέρες με την αυτή λαμπρότητα έχουμε

$$M_{cond} < M_o < M_{col}$$

η M_o αποτελεί την M_{kp} (κρίσιμη μάζα) τότε γράφομε $M_{cond} < M_{kp} < M_{col}$ τότε από την τεταρτοβάθμια εξίσωση του Eddington έχουμε:

$$M_{kp.} = \sqrt{\frac{1 - \beta_o}{0,00309}} \cdot \frac{M_{\odot}}{\beta_o^2 \alpha^2}$$

τότε από την $\alpha = \frac{\mu}{m_H}$ έχουμε:

$$M_{kp.} = \left(\frac{m_H^2}{\mu^2 \beta_o^2} \sqrt{\frac{1 - \beta_o}{0,00309}} \right) M_{\odot}$$

τότε στη συνήθη περίπτωση $\frac{\mu}{m_H} \simeq 2,5$ και $\beta_o = 1,44 M_{\odot}$ (χωρίς να ληφθεί υπόψη περιστροφή).

άρα: $M_{cond} < 1,44 M_{\odot}$

$M_{col} > 1,44 M_{\odot}$

(καλύτερες τιμές δίνουν $M_{kp.} = 1,2 M_{\odot}$ Faulkner 1968) δηλ. αν ένας αστεράς έχει μάζα μικρότερη από $1,44 M_{\odot}$ τότε μπορεί να καταλήξει σε λευκό νάνο κατά την πορεία της εξελίξεώς του αντίθετα αν έχει μάζα $M > 1,44 M_{\odot}$ τότε η κατάσταση που χαρακτηρίζει έναν λευκό νάνο στο εσωτερικό του δεν αποτελεί γι' αυτόν κατάσταση ισορροπίας άρα η συστολή θα συνεχισθεί και το εσωτερικό του θ' αλλάξει σε ένα ρελατιβιστικό αέριο ηλεκτρονίων όπου η στατιστική Fermi-Dirac παύει να ισχύει και η καταστατική του εξίσωση

($P = k\rho^{5/3}$) μεταπίπτει στην ρελατιβιστική $p = \frac{hc}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \rho^{4/3}$ (Milne, Stoner)

όπου

$$\rho > \left(\frac{kT}{hc} \right)^3 \frac{4\pi G}{3} \equiv 2,86 Y T^3$$

και h η σταθερά Planck G η σταθερά βαρύτητας T η απόλυτος θερμοκρασία k η σταθερά Boltzmann c η ταχύτητα του φωτός ρ η πυκνότητα.

Όταν η πυκνότητα υπερβεί την τιμή 10^7gr/cm^3 αρχίζουν πάλι οι πυρηνικές αντιδράσεις στο εσωτερικό του αστέρος. Οι απαγορευτικοί νόμοι των πυρηνικών τροχιακών και οι πυρηνικές δυνάμεις αναλαμβάνουν να εξισορροπήσουν την διαρκώς αυξανόμενη βαρύτητα. Τα νετρόνια εισέρχονται εντός των πυρήνων, πυρήνες πλούσιοι σε νετρόνια παράγονται και η ποσότητα του Fe^{56} μικραίνει π.χ. με την αντίδραση $Fe_{26}^{56} + 6n \rightarrow Ni_{28}^{62} + 4e^-$ ενώ η συνεχιζόμενη αύξηση της πυκνότητας αρχίζει να ευνοεί την δημιουργία ακόμη πλουσιότερων σε νετρόνια πυρήνων όπως το Y_{39}^{122} μέχρις ότου η πυκνότητα να φθάσει την τιμή των $3 \cdot 10^{11} \text{gr/cm}^3$ οπότε τα ήδη εκφυλισμένα πυρηνικά τροχιακά «συντρίβονται». Οι πυρηνικές δυνάμεις «χάνουν την μάχη» με την βαρύτητα. Τα νετρόνια δεν συγκρατούνται πλέον στους πυρήνες, μια και οι πυρηνικές δυνάμεις χάνουν την ισχύ τους μέσα στους ίδιους τους πυρήνες, και εξέρχονται για να σχηματίσουν ένα νέφος νετρονίων. Καθώς συνεχίζεται η αύξηση της πυκνότητας ο αριθμός των νετρονίων του νέφους αυξάνει μέχρις ότου στην τιμή της πυκνότητας 10^{13}gr/cm^3 η ύλη του αστέρος αποτελείται μόνο από ένα αέριο νετρονίων. Αυτοί οι αστέρες που η ύλη τους αποτελείται από νέφος νετρονίων λέγονται αστέρες νετρονίων.

Ένας αστέρας νετρονίων μπορεί να διατηρηθεί σε ισορροπία όταν η κεντρική του πυκνότητα κυμαίνεται μεταξύ 10^{13}gr/cm^3 και $10^{15,8} \text{gr/cm}^3$. Οι αστέρες αυτοί έχουν αρκετά μικρή μάζα (μεταξύ των ορίων $1,44 M_{\odot}$ (Chandrasekhar 1931) $1,2 M_{\odot}$ (Faulkner και Chandrasekhar 1931) $1,2 M_{\odot}$ (Faulkner και Gribbin 1968) και $1,3 M_{\odot}$ (Grampton και Hutching 1972)) και ακτίνες της τάξεως των 10 χιλιομέτρων ενώ μια έκρηξη Supernova μπορεί ν' αφήσει πίσω της ένα άστρο νετρονίων με πολύ μικρότερη μάζα από τα παραπάνω όρια, πράγμα που συμβαίνει στην περίπτωση των pulsars, και με επιφανειακές θερμοκρασίες της τάξεως των 10^7 °C που προκαλούν την ακτινοβολία του άστρου στην περιοχή των ακτίνων X. Στην ουσία στα 1939 οι Oppenheimer και Volkoff απέδειξαν με ρελατιβιστικό χειρισμό των καταστατικών εξισώσεων ισορροπίας ότι σταθερή κατάσταση ισορροπίας για τα άστρα νετρονίων υπάρχει μόνο για μάζες M τέτοιες ώστε: $1,3 M_{\odot} \lesssim M \lesssim 0,7 M_{\odot}$ και πυκνότητες ρ : $1,0 \cdot 10^{14} \lesssim \rho \lesssim 3,6 \cdot 10^{15} \text{gr/cm}^3$ που είναι και οι γενικά παραδεκτές συνθήκες για έναν αστέρα νετρονίων σε ισορροπία.

Πράγματι να πάρουμε το στατικό στοιχείο τόξου ds που αντιστοιχεί σε σφαιρικά συμμετρικά πεδίο βαρύτητας αυτό έχει την έκφραση:

$$ds^2 = e^{\lambda} dt^2 - e^{\nu} dr^2 - r^2 (\sin^2 \theta d\Phi^2 + d\theta^2)$$

όπου $\lambda = \lambda(r)$ $\nu = \nu(r)$ και ds είναι το κινηματικό στοιχείο τόξου του τετραδιάστατου μιγαδικού θεσεογραφικού τόξου της θεωρίας της σχετικότητας.

Τότε από τις εξισώσεις πεδίου του Einstein $R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = 8\pi T_{ik}$

όπου R_{ik} = ο τανυστής του Ricci

R η βαθμωτή καμπυλότητα ($R^i_i = R$ συναίρεση) και

T_{ik} ο τανυστής κινητικής ενεργείας.

(Χρησιμοποιούμε στη σχέση $R^i_i = R$ την μέθοδο αθροίσεως του Einstein όπου έναν συναντούμε έναν άνω και έναν κάτω δείκτη ίδιους παίρνουμε το άθροισμα για όλες τις δυνατές τιμές τους εκτός αν λέγεται προηγουμένως το αντίθετο. Δηλ. $R^i_i = R^0_0 + R^1_1 + R^2_2 + R^3_3$) και κατόπιν υπολογισμών έχουμε:

$$8\pi p = e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} \quad (1)$$

$$8\pi \varepsilon = e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \quad (2)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{p + \varepsilon}{2} r' \quad (3)$$

όπου οι τόνοι συμβολίζουν παραγώγιση ως προς τ (η λύση αυτή έγινε από τον Tolman στα 1934 και χρησιμοποιήθηκε επίσης από τους Oppenheimer και Volhoff στα 1939).

Αυτές οι 3 εξισώσεις και η (4) $\varepsilon = \varepsilon(p)$ καθορίζουν την μηχανική ισορροπία της κατανομής μάζας που εξετάζουμε σαν την εξάρτηση των g_{ck} από τα r .

Το σύνορο της κατανομής της μάζας καθορίζεται από την συνθήκη: για $r = r_b$ ($r_{boundary}$) έχουμε $p = 0$ και για $r < r_b$, $p > 0$.

Στον κενό χώρο που περιβάλλει την σφαιρικά συμμετρική κατανομή έχουμε την εξωτερική λύση του Schwarzschild

$$e^{-\lambda(r)} = 1 + \frac{A}{r} \quad e^{-\nu(r)} = B \left(1 + \frac{A}{r} \right) \quad (5)$$

και με την απαίτηση για μεγάλες αποστάσεις να έχουμε την μορφή του ασθενούς πεδίου βαρύτητας βρίσκουμε

$$B = I \quad A = -2m \quad (6)$$

όπου m η ολική μάζα της κατανομής όπως θα την μετρούσε μακρινός παρατηρητής (Tolman 1934). Η σχέση που αναφέραμε πιο πάνω $\varepsilon = \varepsilon(p)$ αποτελεί την εξίσωση καταστάσεως του συστήματος μια και P είναι η πίεση και η ε αφού η μάζα θεωρείται ακίνητη συμπίπτει με την πυκνότητα ρ της

μάζης ($\varepsilon = \frac{E}{V}, E = mc^2 \rightarrow \varepsilon = \frac{m}{V} c^2 = \rho c^2$ χρησιμοποιώντας σύστημα με την ταχύτητα του φωτός 1 έχουμε $\varepsilon = \rho$).

από τις (1)(2)(3)(4) και με τις τιμές των A,B από την (6) έχουμε:

$$v(r) = v(r_b) - \int_0^{p(r)} \frac{2dP}{P + \varepsilon(p)} \rightarrow e^{v(r)} = e^{v(r_b)} \exp \left[- \int_0^{p(r)} \frac{2dP}{P + \varepsilon(p)} \right]$$

επειδή $e^{v(r)}$ συνεχής στο σύνορο έπεται:

$$e^{v(r)} = \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \exp \left[- \int_0^{p(r)} \frac{2dP}{P + \varepsilon(p)} \right] \quad (7)$$

έτσι το e^v είναι γνωστή συνάρτηση του r αν η p είναι γνωστή συνάρτηση του r .

Με αλλαγή μεταβλητών θέτοντας

$$u(r) = \frac{1}{2} r (1 - e^{-\lambda}) \text{ ή } e^{-\lambda} = 1 - \frac{2u}{r} \quad (8)$$

η (2) γίνεται:

$$\frac{du}{dr} = 4\pi\varepsilon(p) \cdot r^2 \quad (9)$$

στην (1) αντικαθιστούμε την (8) και την τιμή του v' από την (3) και έχουμε:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{P + \varepsilon(p)}{r(r - 2u)} [4\pi p r^3 + u] \quad (10)$$

το σύστημα (9),(10) είναι σύστημα α' τάξεως εξισώσεων και με τις αρχικές τιμές $u=u_0, p=p_0$ στο $r=0$ οι δύο εξισώσεις ολοκληρώνονται αμέσως έως το σύνορο $r=r_b, p=0$ ενώ η τιμή του $e^{\lambda(r_b)}$ ορίζεται από το ζεύγος τιμών $r=r_b, u=u_b$ τότε έχουμε:

$$u_b = \frac{r_b}{2} [1 - e^{-\lambda(r_b)}] = \frac{r_b}{2} \left[1 - \left(1 - \frac{2m}{r_b} \right) \right] = m$$

έτσι η τιμή της συναρτήσεως u στο σύνορο μας δίνει την ολική μάζα του συστήματος για τις τιμές p_0, u_0 στο $r=0$ έχουμε:

(α) από την φυσική σημασία της πίεσεως $p_0 \geq 0$.

(β) από την (8) έχουμε ότι $u_0=0$ για άπειρες τιμές του $e^{-\lambda}$ στην αρχή των συντεταγμένων $r=0$. Αλλά για πεπερασμένες τιμές του p_0 έχουμε $p_0=0$ την μόνη τιμή του p_0 που να μπορεί να έλθει σε συμφωνία με την $u_0 \leq 0$ και για εξισώσεις καταστάσεως όπως του προβλήματος αυτού ακόμα και η πιθανότητα $u_0 \leq 0$ πρέπει να μην ισχύει οπότε $u_0=0$ πάντα (Oppenheimer και Volkoff, 1939).

Τα παραπάνω δείχνουν ότι οι εξισώσεις (9) (10) μαζί με μια καταστατική εξίσωση $\varepsilon=\varepsilon(p)$ καθορίζουν πλήρως την κατανομή μάζας. Για $\varepsilon = \text{σταθερά}$

και $u_o=0$ οι (9)(10) ολοκληρώνονται και δίνουν την εσωτερική λύση του Schwarzschild. Άλλες καταστατικές εξισώσεις δίνουν διάφορες λύσεις.

Μια λύση είναι ενδιαφέρουσα αν θεωρήσουμε ότι η ύλη αποτελείται από σωματίια μάζας μ_o που υπακούουν στη στατιστική Fermi και που η θερμική ενέργειά τους καθώς και όλες οι μεταξύ τους δυνάμεις μπορούν να ληφθούν υπ' όψη. Τότε οι Oppenheimer και Volkoff έδειξαν ότι η καταστατική εξίσωση μπορεί να τεθεί υπό παραμετρική μορφή σαν:

$$\varepsilon = k(\sinh t - t) \quad (11)$$

$$p = \frac{1}{3}k(\sinh t - 8\sinh\left(\frac{t}{2}\right) + 3t) \quad (12)$$

$$\text{όπου} \quad k = \pi \mu_o^4 c^5 / 4h^3 \quad (13)$$

t παράμετρος μ_o η μάζα ηρεμίας των σωματίων (ενός σωματίου).

c η ταχύτης του φωτός

h η σταθερά του Planck

η παράμετρος t έχει την έκφραση:

$$t = 4 \log \left(\frac{\hat{p}}{\mu_o c} + \left[1 + \left(\frac{\hat{p}}{\mu_o c} \right)^2 \right]^{1/2} \right) \quad (14)$$

όπου $\hat{p}$ η μέγιστη ορμή στην κατανομή Fermi και σχετίζεται με την ακριβή πυκνότητα N/V των σωματίων (proper density) με την σχέση:

$$N/V = \frac{8\pi}{3h^3} \hat{p}^3 \quad (15)$$

αντικαθιστώντας τα παραπάνω στις (9) και (10) έχουμε:

$$\frac{du}{dr} = 4\pi r^2 k (\sinh t - t) \quad (16)$$

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{4}{r(r-2u)} \cdot \frac{\sinh t - 2\sinh\left(\frac{t}{2}\right)}{\cosh t - 4\cosh\left(\frac{t}{2}\right) + 3} \times \left[\left(\frac{4}{3}\right) \pi k r^3 (\sinh t - 8\sinh\left(\frac{t}{2}\right) + 3t) + u \right] \quad (17)$$

και η ολοκλήρωση των εξισώσεων γίνεται από $u=0$, $t=t_o$ $r=0$ έως $r=r_b$ $t_b=0$ (ώστε $p=0$) και $u=u_b$.

Επειδή όλες οι παραπάνω εξισώσεις γράφτηκαν θέτοντας τις σταθερές 1 δηλ. $c=1$ η ταχύτητα του φωτός, $G=1$ σταθερά βαρύτητας αυτό καθορίζει τις μονάδες του χρόνου και της μάζας σε ένα τυχαίο μήκος. Αν θέσω $k = 1/4\pi$ καθορίζεται.

Οι (16) (17) γίνονται:

$$\frac{du}{dr} = r^2 (\sinh t - t) \quad (18)$$

$$\text{και} \quad \frac{dt}{dr} = -\frac{4}{r(r-2u)} \cdot \frac{\sinh t - 2 \sinh\left(\frac{t}{2}\right)}{\cosh t - 4 \cosh\left(\frac{t}{2}\right) + 3} \times \left[\frac{r^3}{3} \left(\sinh t - 8 \sinh\left(\frac{t}{2}\right) + 3t \right) + u \right] \quad (19)$$

με μονάδα μήκους:

$$a = \frac{1}{\pi} \left(\frac{h}{\mu_o c} \right)^{3/2} \frac{c}{(\mu_o G)^{1/2}}$$

$$\text{και μονάδα μήκους: } b = \frac{c^2 a}{G} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{h}{\mu_o c} \right)^{3/2} \cdot \frac{c^3}{(\mu_o G)^{1/2}}$$

για νετρόνια $a = 1,36 \cdot 10^6 \text{ cm}$ $b = 1,83 \cdot 10^{34} \text{ gr}$.

Ο γενικός χαρακτήρας της λύσεως φαίνεται να μην εξαρτάται από τη μάζα του νετρονίου που καθορίζει μόνο την κλίμακα του αποτελέσματος.

Επειδή δεν βρέθηκε τρόπος ολοκλήρωσεως των (18) και (19) ολοκληρώθηκαν αριθμητικά από τους Oppenheimer και Volkoff για αρκετές πεπερασμένες τιμές του t_o . Σε όλες τις περιπτώσεις είχε ληφθεί $u_o = 0$ γιατί : Η εξίσωση καταστάσεως για πεπερασμένο t_o με $u_o < 0$ κοντά στο $r=0$ συμπεριφέρεται σαν $\varepsilon(p) = kp^s$ με $s > 1$ για την οποία τιμή η $p_o \geq 0$ δεν μπορεί να ικανοποιηθεί.

Για την τιμή $t_o \rightarrow \infty$ οι (18)(19) μπορούν να προσεγγιστούν με τις ασυμπτωτικές τους εκφράσεις:

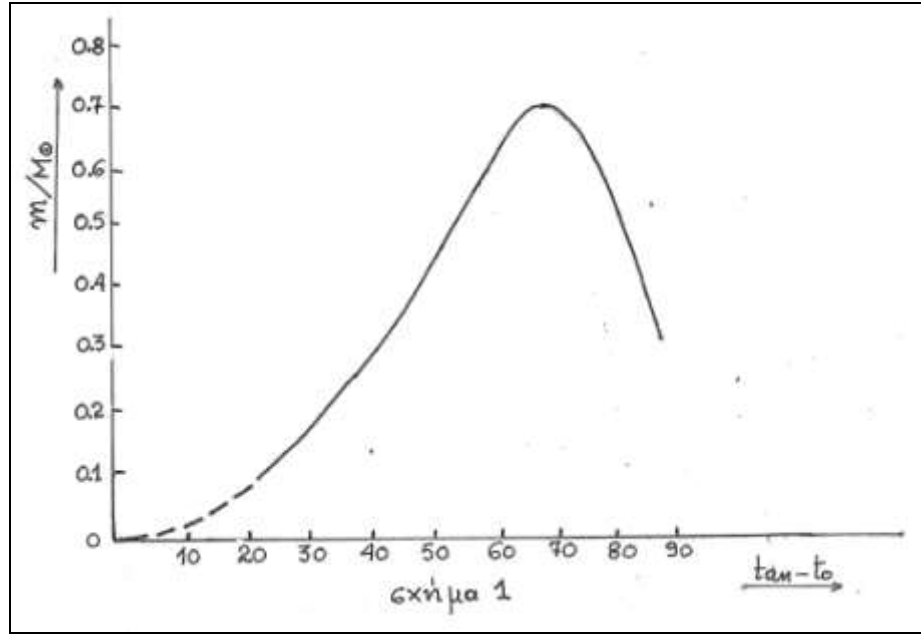
$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{2} r^2 e^t \quad (20)$$

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{4}{r(r-2u)} \left[\frac{r^3}{6} e^t + u \right] \quad (21)$$

οι οποίες έχουν ακριβή λύση τις $e^t = \frac{3}{7r^2}$ και $u = \frac{3r}{14}$ (Tolman) που

αντιστοιχούν $t_o \rightarrow \infty$ με $r=0$ $u_o = 0$.

Για την περίπτωση που τα σωμάτια είναι νετρόνια οι Oppenheimer και Volkoff εκφράζοντας την μάζα συναρτήσει της παραμέτρου t κατέληξαν σε μια καμπύλη της μορφής:



που αντιστοιχεί στον πίνακα:

t_0	$m/M_\odot$	ακτίς (km)	$\left(\frac{p}{\mu_o c}\right)_{r=0}$	$\left(\frac{N}{V}\right)_{r=0} \text{ mektrons/cm}^3$
1	0,30	21,1	0,25	$0,062 \cdot 10^{39}$
2	0,60	13,3	0,52	$056 \cdot 10^{39}$
3	0,71	9,5	0,82	$2,2 \cdot 10^{39}$
4	0,64	6,8	1,17	$6,4 \cdot 10^{39}$
∞	0,34	3,1	∞	∞

Το συμπέρασμα που βγαίνει από την καμπύλη $m/m_\odot = f(\tan^{-1} t_0)$ είναι ότι αυξανόμενου του t_0 η μάζα αυξάνει με μέγιστο στο $t_0 = 3$ μετά από το οποίο πέφτει μέχρι μια τιμή περίπου $\frac{1}{3} m_\odot$ για $t_0 = \infty$. Μ' άλλα λόγια καμμία

στατική λύση δεν υπάρχει για $m > 3/4 m_\odot$, 2 λύσεις υπάρχουν για $\frac{3}{4} m_\odot > m >$

$\frac{1}{3} m_\odot$, και μία λύση για κάθε $m < \frac{1}{3} m_\odot$.

Η τελευταία περίπτωση $m < \frac{1}{3} m_\odot$ αντιστοιχεί στην διακεκομμένη καμπύλη

της γραφικής παράστασης κοντά στην αρχή των αξόνων και αντιστοιχεί στην περίπτωση $m < 0,1 m_\odot$ κατά την οποία ο νετρονικός πυρήνας του άστρου είναι διαχωρισμένος σε πυρήνες και ηλεκτρόνια δηλ. δεν υπάρχει εκεί αστήρ νετρονίων αλλά μια εκφυλισμένη μορφή κάποιου ρελατιβιστικού ή όχι αερίου

ηλεκτρονίων. Άρα η περίπτωση $m < \frac{1}{3} m_\odot$ αποκλείεται πλήρως για έναν αστέρα νετρονίων και αποτελεί ένα minimum ενώ το μέγιστο της καμπύλης γύρω από $0,71 m_\odot$ δείχνει ένα maximum για τη μάζα ενός αστέρος νετρονίων ώστε αυτός να βρίσκεται στην περιοχή όπου υπάρχουν 2 λύσεις στατικά δηλαδή εκεί όπου μπορεί ο αστέρας να έλθει σε μια κατάσταση ισορροπίας. Αν πάλι χρησιμοποιήσουμε αντί την παραπάνω καταστατική εξίσωση $\varepsilon=\varepsilon(t)$ $p=p(t)$ χρησιμοποιήσουμε την τετραγωνική καταστατική εξίσωση του Tolman που αντιστοιχεί σε ομαλή λύση των εξισώσεων του στατικού σφαιρικά συμμετρικού πεδίου:

$$8 \frac{(P_c - P)^2}{P_c + \varepsilon_c} - 5(P_c - P) + (\varepsilon_c - \varepsilon) = 0$$

όπου P_c, ε_c η κεντρική πίεση και πυκνότητα του άστρου και την έκφραση για την μάζα: $4 \left(\frac{P_c}{\varepsilon_c + 3P_c} \right)^{3/2} \left[\frac{8\pi}{3} (\varepsilon_c - 3P_c) \right]^{-1/2}$ που αντιστοιχεί στην παραπάνω καταστατική εξίσωση και θέτοντας $m = 1/42B$ (Tolman) τότε μια λύση της τετραγωνικής εξισώσεως καταστάσεως είναι η:

$$P = \frac{\varepsilon}{3} \frac{1 - 9 \left(\frac{B}{A} \right) \left(\frac{3}{56\pi} \right)^{1/2} \varepsilon^{-1/2}}{1 - \left(\frac{B}{A} \right) \left(\frac{3}{56\pi} \right)^{1/2} \varepsilon^{-1/2}} \quad (Tolman).$$

η εξίσωση αυτή βρίσκεται σε συμφωνία μέχρι όρους τάξεως $\varepsilon^{1/2}$ με τις εξισώσεις καταστάσεως (11)(12) και δίνει $B/A = \sqrt{7/3}$ και ελάχιστη μάζα $m \sim \frac{1}{7} m_\odot$ αντίστοιχη στην παραπάνω $m \sim \frac{1}{3} m_\odot$ του κατωτέρου ορίου για να υπάρχει στατική λύση.

Μια συζήτηση και μια κριτική των παραπάνω στη φυσική τους βάση είναι χρήσιμη όπως και το αναπόφευκτο ερώτημα τι συμβαίνει με τα όρια των Chandrasekhar, Faulkner και Gribbin, Crampton και Hutching που αναφέραμε πιο πάνω και που είναι αντίστοιχα $1,44 m_\odot$, $1,2 m_\odot$, $1,3 m_\odot$.

Τα συμπεράσματα του ρελατιβιστικού χειρισμού του προβλήματος δείχνουν πως για έναν ψυχρό νετρονικό πυρήνα του άστρου (θερμική ενέργεια και δυνάμεις μεταξύ των σωματίων αμελητέες) δεν υπάρχει στατική λύση αν η μάζα του είναι $m \geq 0,7 m_\odot$.

Η αντίστοιχη μάζα πριν την συστολή του άστρου θα είναι περίπου 10% μεγαλύτερη δηλαδή γύρω στα $0,8 m_\odot$.

Έτσι αφού για μάζες μικρότερες από $\sim 0,1m_{\odot}$ (αφού ένας νετρονικός πυρήνας δεν μπορεί να ξαναδώσει πυρήνες ατόμων και ηλεκτρόνια δηλαδή η εντροπία δεν μπορεί να αντιστραφεί) και αφού ακόμη και μετά την εξάντληση όλων των θερμοπυρηνικών καυσίμων του αστέρος ο αστήρ δεν μπορεί να καταρρεύσει για μάζες μικρότερες από $1,2m_{\odot}$ τουλάχιστον (παίρνουμε την ελάχιστη από τις 3 παραπάνω τιμές ώστε η βεβαιότητα να είναι μεγαλύτερη) τότε φαίνεται ότι σταθεροί νετρονικοί πυρήνες $0,0m_{\odot} \leq 0,7m_{\odot}$ δύσκολα μπορούν να θεωρηθούν ότι παίζουν κάποιο ρόλο στην εξέλιξη ενός άστρου δηλαδή πρόκειται για σταθερές καταστάσεις που τείνουν να διαιωνισθούν αμετάβλητες και αν ένα άστρο φθάσει σε μια τέτοια κατάσταση θα παραμείνει σ' αυτήν θεωρητικά άπειρο χρόνο με μικρές μόνο διακυμάνσεις, που σημαίνει πως το άστρο θα έχει φθάσει σ' ένα τέρμα της εξελικτικής του πορείας (η αγγλική έκφραση *dead end* αποδίδει ακριβώς τον χαρακτήρα αυτού του τέλους).

Βλέποντας ακόμα την αναφορά μεταξύ των ορίων $1,2M_{\odot}$, $1,3M_{\odot}$, $1,44M_{\odot}$ και του ανωτέρου ορίου για τη στατική λύση ενός αστέρος νετρονίων $0,7$ ή $0,8m_{\odot}$ βρίσκουμε διαφορά τουλάχιστον $0,4m_{\odot}$ και μια μέγιστη διαφορά $\sim 0,7m_{\odot}$ δηλαδή μια διαφορά ίση περίπου με τη μάζα ολόκληρου αστέρος. Η διαφορά αυτή φυσικά δεν είναι δυνατόν να αμεληθεί και μας ανοίγει έναν δρόμο και μόνο ότι δηλαδή μεταξύ των ορίων των Chandrasekhar, Faulkner και Gribbin, Grampton και Hutching που αφορούν στη μη διατήρηση της ισορροπίας στο προηγούμενο του αστέρος νετρονίων στάδιο και στην κατάσταση ισορροπίας (στατική λύση) των Oppenheimer και Volkoff, μεσολαβεί κάτι που να κάνει έναν αστέρα να χάσει αυτό το ποσόν των $0,4-0,7m_{\odot}$ και η λογική λέει πως κάτι τέτοιο θα πρέπει να είναι αρκετά βίαιο σαν μια έκρηξη ίσως. Αυτό βέβαια αν θέλουμε να συμβιβάσουμε τα 2 συμπεράσματα και να τα συνδέσουμε σε μια συνεχή σειρά όπου ένας λευκός νάνος μεταπίπτει σε έναν αστέρα νετρονίων σε ισορροπία.

Αλλά η περίπτωση εκρήξεως ενός λευκού νάνου είναι απίθανη με «δικά του μέσα» λόγω της μικρής του μάζας και μπορεί να αντιμετωπισθεί σοβαρά μόνο στην περίπτωση που έχουμε έναν λευκό νάνο σε διπλό σύστημα ανταλλαγής μάζας όπου η συσσωρευμένη μάζα από τον άλλο σύντροφο του λευκού νάνου στον λευκό νάνο προκαλεί νέο έναυσμα πυρηνικών αντιδράσεων στο εσωτερικό του με αποτέλεσμα την έκρηξη του λευκού νάνου σε Nova που έχει την δυνατότητα της απομακρύνσεως μάζας $0,4-0,7m_{\odot}$ από τον αστέρα.

Ακόμη μια Supernova μπορεί να εκτινάξει στο διάστημα μέχρι και $2m_{\odot}$ που μας δείχνει ότι ένας αστέρας πολύ πάνω από το όριο του Chandrasekhar με μάζα μέχρι και $2,7m_{\odot}$ μπορεί να μεταπέσει στην κατάσταση ισορροπίας

αστέρος νετρονίων μετά από μια έκρηξη Supernova. Σ' αυτήν ακριβώς την περίπτωση ανήκουν τα pulsars.

Τι γίνεται όμως αν ένας αστέρας παραμείνει μετά το τέλος των πυρηνικών του καύσεων με μάζα $m > 1,2m_{\odot}$ και φυσικά δεν υποστεί έκρηξη Nova ή Supernova; Τότε όπως αποδείχθηκε στα προηγούμενα ουδέποτε μπορεί να φθάσει στο στάδιο ενός αστέρος νετρονίων σε ισορροπία ή για να χρησιμοποιήσουμε μια πιο αυστηρή έκφραση για έναν αστέρα, που έχει εξαντλήσει τα πυρηνικά του καύσιμα και έχει παραμείνει με μάζα τουλάχιστον πάνω από $1,2m_{\odot}$, η κατάσταση ισορροπίας ενός αστέρος νετρονίων δεν είναι γι' αυτόν προσιτή κατάσταση από φυσική άποψη.

Βαρυτική κατάρρευση

Αυτή η παράγραφος αφορά ακριβώς στην περίπτωση ενός αστέρος που μετά την εξάντληση των πυρηνικών του αποθεμάτων έχει παραμείνει με μάζα $m \geq 1,2m_{\odot}$.

Και επειδή στην επόμενη παράγραφο που αφορά στις μελανές οπές θα αναφέρονται οι διάφοροι τρόποι βαρυτικής καταρρεύσεως εδώ θα περιοριστούμε μόνο στη μη στατική περίπτωση σαν συνέχιση της προηγούμενης παραγράφου για σφαιρικά συμμετρικό πεδίο βαρύτητας και σαν ένα συνδυαστικό κρίκο μόνο που να μας οδηγήσει στην κατάσταση της singularity του χωροχρόνου και να μας ανοίξει το δρόμο προς την παραπέρα ανάλυση.

Ακόμη όλοι οι εδώ υπολογισμοί είναι οι ίδιοι αρχικά που οδηγούν στους τύπους της σχετικιστικής αντιμετώπισης της ισορροπίας στην προηγούμενη παράγραφο ασχοληθήκαμε όμως με τις ανώμαλες λύσεις (non singular solutions) των εξισώσεων. Εδώ αντίθετα θα ασχοληθούμε ακριβώς μ' αυτές πρώτα.

Το κινηματικό στοιχείο τόξου του σχετικιστικού θεσεογραφικού χώρου για την στατική (μή περιλαμβάνουσα τον χρόνο στην μετρική) και σφαιρικά συμμετρική (μετρική εξαρτωμένη από την r μόνο) περίπτωση είναι:

$$ds^2 = e^{\nu} c^2 dt^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - e^{\lambda} dr^2$$

αντιστοιχώντας τις συντεταγμένες $x^0 \rightarrow t$ $x^1 \rightarrow r$ $x^2 \rightarrow \theta$ $x^3 \rightarrow \phi$ έχουμε για τις αναλοιώτες συνιστώσες του μετρικού τανυστή.

$$\begin{aligned} g_{00} &= e^{\nu} & g_{11} &= -e^{\lambda} & g_{22} &= -r^2 & g_{33} &= -r^2 \sin^2 \theta \\ g^{00} &= e^{-\nu} & g^{11} &= -e^{-\lambda} & g^{22} &= -r^{-2} & g^{33} &= -r^{-2} \sin^{-2} \theta . \end{aligned}$$

υπολογίζουμε τα σύμβολα του Christoffel

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{in} \left(\frac{\partial g_{en}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kn}}{\partial x^e} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^n} \right)$$

(άθροισμα ως προς n δείκτη)

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{\lambda''}{2} & \Gamma_{10}^0 &= \frac{v'}{2} & \Gamma_{33}^2 &= -\sin\theta \cos\theta \\ \Gamma_{22}^1 &= -re^{-\lambda} & \Gamma_{00}^1 &= \frac{v'}{2}e^{v-\lambda} & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{23}^3 &= \cot\theta & \Gamma_{33}^1 &= -r\sin^2\theta e^{-\lambda}.\end{aligned}$$

Όλα τα άλλα Γ_{kl}^i , εκτός από εκείνα που προκύπτουν από τα παραπάνω με εναλλαγή των 2 κάτω δεικτών ($\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{lk}^i$), είναι μηδέν.

Εδώ δεν θεωρούμε τις σταθερές k της βαρύτητας και c της ταχύτητας του φωτός μονάδα και σύμφωνα με τις σταθερές του Landau οι εξισώσεις πεδίου του Einstein γίνονται

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi k}{c^4}T_{ik}$$

επειδή $R = g^{ik}R_{ik}$

$$\text{και} \quad R_{ik} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^\ell}{\partial x^\ell} - \frac{\partial \Gamma_{i\ell}^\ell}{\partial x^k} + \Gamma_{i\ell}^\ell \Gamma_{\ell m}^m - \Gamma_{i\ell}^m \Gamma_{km}^\ell$$

(τρόπος αθροίσεως του Einstein).

Έχουμε μετά από υπολογισμούς:

$$\begin{aligned}\frac{8\pi k}{c^4}T_1^1 &= -e^{-\lambda}\left(\frac{v'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} \\ \frac{8\pi k}{c^4}T_2^2 &= \frac{8\pi k}{c^4}T_3^3 = -\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(v'' + \frac{v'^2}{2} + \frac{v'-\lambda'}{r} - \frac{v'\lambda'}{2}\right) \\ \frac{8\pi k}{c^4}T_0^0 &= -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2}\end{aligned}$$

ενώ όλοι οι άλλοι όροι του T_i^k ταυοστή κινητικής ενεργείας είναι εκ ταυτότητος 0.

Τότε επειδή όταν όλες οι συνιστώσες του T_i^k είναι 0 εκτός από τα διαγώνια στοιχεία έχουμε:

$$T_i^k = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

$$\frac{8\pi k\varepsilon}{c^4} = -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2} \quad (1)$$

(τόνοι δείχνουν παραγωγή ως προς τ)

$$\frac{8\pi kp}{c^4} = +e^{-\lambda}\left(\frac{v'}{r} + \frac{1'}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} =$$

$$= +\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(v''+\frac{v'^2}{2}+\frac{v'-\lambda'}{r}-\frac{v'\lambda'}{2}\right) \quad (2)$$

Τότε ολοκλήρωση της (1) δίνει:

επειδή $\varepsilon = \rho c^2$ ρ η πυκνότητα έχουμε:

$$dm = \rho dV = 4\pi \frac{\varepsilon}{c^2} r^2 dr = \frac{c^2}{2k} d(r - re^{-\lambda})$$

$dV = 4\pi r^2 dr$ θεωρουμένης σφαιρικής συμμετρίας

$$\text{άρα: } m_r = \int_0^r \frac{4\pi \varepsilon}{c^2} r^2 dr = \frac{c^2}{2k} r(1 - e^{-\lambda}) \Big|_0^r$$

ό,τι τιμή και να παίρνει το $e^{-\lambda}$ στο o ο μηδενισμός της r μηδενίζει τον παράγοντα στο $r=0$ και άρα το μέρος της μάζας του συστήματος από $r=0$ έως

$r=r$ δηλ. εντός σφαίρας $(0,r)$: $m_r = \frac{c^2}{2k} r(1 - e^{-\lambda})$ απ' όπου προκύπτει:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2km_r}{c^2 r} \rightarrow e^{\lambda} = \frac{1}{1 - \frac{2km_r}{c^2 r}}$$

$$\lambda = -\ell u \left(1 - \frac{2km_r}{c^2 r}\right) \quad (3)$$

όπου το m_r φυσικά δεν είναι σταθερό αλλά εξαρτάται από την r και αντιστοιχεί στην μεταβλητή $u(r)$ της εξίσωσης (2.8) [§2 εξισ. 8] ακόμα από την (2.3) έχουμε (λόγω της σχέσεως T_i^k, k^0).

$$\frac{dP}{dr} = \frac{\varepsilon + \rho}{2} v' \quad (\text{Oppenheimer και Volkoff}) \quad (4)$$

κάνοντας την παραγωγή ως προς r της (2) και αντικαθιστώντας τα ρ, ε στην (4) έχουμε:

$$(2) \rightarrow v'' = \frac{2e^{\lambda}}{r^2} + \frac{v'}{r} + \frac{2}{r^2} - \frac{v'^2}{2} + \frac{\lambda'}{r} + \frac{\lambda'v'}{2}$$

$$(4) \rightarrow v'' = \frac{e^{\lambda}}{r} v' + \frac{3}{2} \ell' v' + \frac{v'^2}{2} + \frac{2e^{\lambda}}{r^2} + \frac{2}{r^2} + \frac{v'}{r} + \frac{\lambda'}{r}$$

και αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$$v'\lambda' + v'^2 = -\frac{v'e^{\lambda}}{r} = 0 \rightarrow \lambda' + v' = -\frac{e^{\lambda}}{r} \quad (5)$$

τότε βρίσκουμε αντικαθιστώντας την (5) στην (2)

$$\frac{8\pi k p}{c^4} = e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) \quad (6)$$

που μας δίνει ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα

$$(1) + (6) \rightarrow \varepsilon + p = \frac{c^4}{8\pi k} \frac{1}{r^2} \quad (7)$$

η (7) μας λέει ότι όταν η $r \rightarrow 0$ το άθροισμα $(\varepsilon + p) \rightarrow \infty$ και όταν $r \rightarrow \infty$, $(\varepsilon + p) \rightarrow 0$ το σύνορο της σφαιρικής κατανομής καθορίζεται ως γνωστό με τη συνθήκη $p_b = 0$ άρα το r_b ($r_{boundary}$) είναι :

$$\varepsilon_b = \frac{c^4}{8\pi k} \frac{1}{r_b^2} \quad (8)$$

η (8) μας δίνει την πυκνότητα στην επιφάνεια της σφαίρας. Ενώ σε συνδυασμό με την (4) δίνει:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{c^4}{16\pi k} \frac{dv}{dr} \frac{1}{r^2} \quad (9)$$

με συναίρεση των εξισώσεων του Einstein έχουμε:

$$g^{ik} R_{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} g_{ik} R = \frac{8\pi k}{c^4} g^{ik} T_{ik} \rightarrow$$

$$R - 2R = \frac{8\pi k}{c^4} T \rightarrow R = -\frac{8\pi k}{c^4} T$$

και

$$T = g^{ik} T_{ik} = g^{ik} [(\varepsilon + p) u_i u_k - g_{ik} P] = \varepsilon - 3p \rightarrow R = \frac{8\pi k}{c^4} (p - \varepsilon) \quad (10)$$

από τις (7) και (10) έχουμε:

$$R = \frac{3}{r^2} - \frac{32\pi k}{c^4} \varepsilon \quad (11)$$

η (11) είναι η σπουδαιότερη σχέση από όλες τις παραπάνω γιατί δείχνει πως η καμπυλότητα R γίνεται μηδέν χωρίς αυτό να επηρεάζει την πυκνότητα απλώς τότε:

$$\varepsilon_o = \frac{3c^4}{32\pi k} \frac{1}{r_o^2} \quad (12)$$

και αντικαθιστώντας στην (7) έχουμε για την πίεση:

$$p_o = \frac{3c^4}{32\pi k} \frac{1}{r_o^2} \quad (13)$$

Ξέρουμε ότι η πίεση προξενεί από τις δυνάμεις βαρύτητας που ασκούνται σε κάθε σημείο από τη μάζα της κατανομής και ότι $\frac{\overline{dF}}{\overline{dS}} = p$ όπου $\overline{dS}$ η

στοιχειώδεις επιφάνεια που δέχεται την δύναμη $\overline{F}$. Σε σφαιρική συμμετρική κατανομή η $\overline{F}$ και το $\overline{dS}$ είναι αντίρροπα για τις δυνάμεις βαρύτητας και επειδή η κατανομή είναι σφαιρικά συμμετρική η F είναι σταθερή για σταθερό r άρα

$$F = 4\pi p r^2 \quad (14)$$

θεωρώντας θετική φορά τη φορά της επιταχύνσεως της βαρύτητας. Από την (14) και την (13) βλέπουμε ότι σημείο που η καμπυλότητα του χώρου έγινε μηδέν η δύναμη είναι σταθερή και ίση με:

$$F_o = \frac{c^4}{8k} \quad (15)$$

η διεύθυνσή της είναι προς το $r=0$ ενώ σε κάθε άλλο σημείο είναι:

$$F = \frac{c^4}{2k} - 4\pi\epsilon r^2 \quad (16)$$

όπου η ϵ είναι η ϵ στο r ή ακόμα με αντικατάσταση στην (11) έχουμε:

$$R = \frac{8k}{c^4 r^2} \left(F - \frac{c^4}{8k} \right) \quad (17)$$

η (17) επίσης μας περιγράφει πολύ καλά την συμπεριφορά της καμπυλότητας R για

$$\begin{aligned} F &< \frac{c^4}{8k} \text{ έχουμε } R < 0 \\ F &= \frac{c^4}{8k} \text{ έχουμε } R = 0 \\ F &> \frac{c^4}{8k} \text{ έχουμε } R > 0 \end{aligned} \quad (18)$$

επειδή η r υπεισέρχεται υψωμένη στη β' δύναμη δεν παίζει κανένα ρόλο για το πρόσημο της R παρά μόνο για την απόλυτο τιμή της.

Αντίθετα το πρόσημο της R όπως φαίνεται καθορίζεται μονοσήμαντα από το μέτρο F της δυνάμεως αντικαθιστώντας στις ανισότητες (18) την (16) έχουμε ανάλογες εκφράσεις για την πυκνότητα.

$$\text{δηλ.} \quad \epsilon(r) > \frac{3c^4}{32\pi k} \frac{1}{r^2}, \quad R < 0$$

$$\epsilon(r) = \frac{3c^4}{32\pi k} \frac{1}{r^2}, \quad R = 0 \quad (19)$$

$$\epsilon(r) < \frac{3c^4}{32\pi k} \frac{1}{r^2}, \quad R > 0$$

($\epsilon = \rho c^2$, ϵ η πυκνότητα ενεργείας ρ η πυκνότητα μάζας όταν η ρ ακίνητη) που μας λέει ότι για οποιοδήποτε r αν ικανοποιείται η (19), δηλ. μια από τις 3 σχέσεις, ισχύει η ανάλογη σχέση για την καμπυλότητα R δηλαδή σε κάθε απόσταση r αντιστοιχεί μια κρίσιμη πυκνότητα $\epsilon(r)$ που μηδενίζει την καμπυλότητα R τοπικά, δηλαδή η πυκνότητα και η απόσταση με τη σχέση που τις συνδέει αποτελούν ένα κριτήριο της καμπυλότητας R (απόσταση εννοούμε την απόσταση από το κέντρο έλξεως).

Ακόμα συγκρίνοντας τις εξισώσεις (8) και (12) βλέπουμε ότι ποτέ η r_o δεν μπορεί να γίνει σύνορο της κατανομής γιατί τότε θα είχαμε ένα σύνορο που δεν θα ικανοποιούσε την συνθήκη του συνόρου $p_b=0$ γιατί $p_b \neq 0$ πράγμα που σημαίνει ότι πάντα ύλη θα βρισκόταν συγκεντρωμένη σε $r > r_o$ πράγματι θέτοντας $\varepsilon_b = \varepsilon_o$ και αντικαθιστώντας στην (8) έχω λύνοντας ως προς r_b ότι:

$$r_b = \frac{2}{\sqrt{3}} r_o \text{ δηλ. όταν } \varepsilon_b = \varepsilon_o \text{ τότε}$$

$$r_b > r_o \quad (20)$$

ακόμη από την (3) έχω $\lambda = -\ell u \left(1 - \frac{2km_r}{c^2 r} \right) \rightarrow \lambda(r_b) = -\ell u \left(1 - \frac{2kM}{c^2 r_b} \right)$ όπου M η ολική μάζα του συστήματος και βλέπω ότι για $r_b = \frac{2kM}{c^2}$ τότε $e^{-\lambda(r_b)} = 0$ δηλαδή $g_{(r_b)}^{11} = e^{-\lambda(r_b)} = 0$ και $g_{11}(r_b) = -e^{\lambda(r_b)} = \infty$ δηλαδή η μετρική του χώρου ως προς την διεύθυνση της ακτίνας r παρουσιάζει μη ομαλή συμπεριφορά στο σημείο $r_b = \frac{2kM}{c^2}$ την τιμή αυτή της ακτίνας ονομάζουμε ακτίνα βαρύτητας του σώματος ή ακτίνα Schwarzschild και συμβολίζουμε με $r_g(r_{gravitations})$ βλέπουμε όμως επίσης ότι η πραγματική μη ομαλή περιοχή ($R=0$) βρίσκεται σε λίγο μικρότερη απόσταση $r_o = \frac{\sqrt{3kM}}{c^2}$ αν πάρουμε σύνορο την r_g αφού η μη ομαλότητα της μετρικής μας δείχνει ένα όριο αλλά το οποίο είναι εφικτό για την ύλη ενώ η (20) εξίσωση και οι σχέσεις $\varepsilon_b = \varepsilon_o \rightarrow r_b > r_o$ (άτοπο) μας δείχνει πως η r_o είναι πάντα ανέφικτη για την κατανομή. Αν το εξετάσουμε έχουμε.

1) Μια ικανοποιητική υπόθεση που να αντιπροσωπεύει τα παραπάνω είναι ότι μεταξύ r_g και r_o μεσολαβεί φλοιός ομογενής αφού $\varepsilon_b = \varepsilon_o$ ή όχι ομογενής με

περιοχή πυκνοτήτων $\varepsilon_g = \frac{c^4}{8\pi k} \frac{1}{r_g^2}$ μέχρι $\varepsilon_g = \frac{3c^4}{32\pi k} \frac{1}{r_o^2}$ αλλά επειδή

$r_g = \frac{2}{\sqrt{3}} r_o \rightarrow \varepsilon_g = \varepsilon_o$ οπότε μάλλον ο φλοιός πρέπει να είναι ομογενής και στην περιοχή του οποίου η καμπυλότητα R μηδενίζεται παντού.

2) Από μια άλλη άποψη αν υποθέσουμε ότι ο χώρος δεν «σπάζει» μεταξύ r_g, r_o πρέπει να θέσουμε $r_g = r_o$ οπότε βρίσκουμε $\varepsilon_o = \frac{3}{4} \varepsilon_b$ δηλαδή για να φθάσει

η ύλη στην ακτίνα $r_o = r_g$ παρουσιάζει έλλειμμα πυκνότητας μάζας το $\frac{1}{4} \varepsilon_b$

δηλαδή $\Delta \varepsilon = \frac{c^4}{32\pi k} \frac{1}{r_g^2}$ από την (13) βλέπουμε την φυσική εξήγηση αυτού του

γεγονότος ότι δηλαδή η πίεση στο σύνορο πρέπει να είναι $p_b = 0 = p_o$ αλλά

$$p_b = \frac{c^4}{32\pi k} \frac{1}{r_o^2} > 0 \text{ (αφού } r_o \neq \infty \text{)}. \text{ Για να μηδενιστεί λοιπόν η πίεση στο σύνορο}$$

ακτινοβολείται η ΔΕ υπό μορφή κυμάτων βαρύτητας ώστε η πίεση της ακτινοβολίας να εξουδετερώσει την P_o δημιουργώντας $P_o = \sum_i P_i = P_{\text{ακτ.}} + P_o = 0$. Η $P_{\text{ακτ}}$ είναι η πυκνότητα ενεργείας του

ακτινοβολουμένου ποσού ενεργείας δηλαδή $P_{\text{ακτ}} = \Delta \frac{dW_g}{dV} = \Delta w_g$ και είναι $\Delta w_g \leq 0$ (το ίσον ισχύει μόνο όταν δεν έχουμε πεδίο βαρύτητας δηλαδή ούτε ύλη).

Από την κλασική φυσική μπορούμε να προσεγγίσουμε με χρήση των Νευτώνειων τύπων του πεδίου ώστε να εξετάσουμε τον τρόπο αυτής της εξαϋλώσεως και ακτινοβολίας.

Έχουμε για την πυκνότητα ενεργείας του πεδίου βαρύτητας $w_g = -\frac{1}{8\pi k} (\bar{\nabla} \Phi)^2$ όπου Φ το δυναμικό (Νευτώνειο) και αμέσως φαίνεται πως η ποσότητα είναι αρνητική ($w_g < 0$ αν $\Phi \neq 0$, $w_g = 0 \Leftrightarrow \Phi = \text{σταθ.}$ αλλά επειδή για $\Phi = \text{σταθ.}$ αντικαθιστούμε το $\bar{\nabla} \Phi$ με ίσον του $\bar{g}$ την επιτάχυνση της βαρύτητας για $\Phi = \text{σταθ.} \neq 0$ έχουμε $w_g = -\frac{1}{8\pi k} \bar{g}^2 \neq 0$ και πάλι $w_g < 0$ οπότε $w_g = 0 \Leftrightarrow \Phi = 0$).

Με βάση τους τύπους της διανυσματικής αναλύσεως και την κλασική σχέση $\bar{\nabla}^2 \Phi = 4\pi k \rho$ για τη σφαιρικά συμμετρική περίπτωση που μελετάμε έχουμε:

$$w_g = -\frac{1}{8\pi k} (\bar{\nabla}^2 [\Phi^2]_{/2}) + \frac{1}{8\pi k} \Phi \bar{\nabla}^2 \Phi \rightarrow$$

$$w_g = -\frac{1}{8\pi k} \bar{\nabla}^2 (\Phi^2_{/2}) + \frac{1}{2} \rho \Phi \quad (21)$$

με τη βοήθεια του τύπου $\Phi = -k \int_{v(\bar{x})} \frac{\rho(\bar{x}, \bar{x}')}{r(\bar{x}, \bar{x}')} dV(\bar{x}')$ που ορίζει το δυναμικό Φ έχω:

$$\Phi^2 = -k \int_{v(\bar{x})} \int_{v(\bar{x}_2)} \frac{\rho_1(\bar{x}, \bar{x}_1)}{r(\bar{x}, \bar{x}_1) \cdot r_2(\bar{x}, \bar{x}_2)} dV(\bar{x}_1) dV(\bar{x}_2)$$

απ' όπου υπολογίζω τον πρώτο προσθετέο του δεξιού μέλους της (21) και έχω:

$$w_g = -\pi k \rho^2 r^2 + \frac{1}{2} \rho \phi \quad (22)$$

ο β' όρος όρος του δεξιού μέλους θα είναι το ποσόν της ακτινοβολουμένης δυναμικής ενεργείας υπό μορφή πεδίου ενώ ο α' όρος αθροίσματος θα είναι

το ποσόν του δυναμικού του πεδίου που οφείλετε στην $\Delta\rho$ και αφού η $\Delta\rho$ έπαυσε να υπάρχει σαν ύλη ακτινοβολείται και αυτό αφαιρούμενο από την ενέργεια σχηματισμού της σφαιρικής κατανομής.

Η σχέση (22) είναι γενική και αφορά σε οποιοδήποτε r και ρ της κατανομής άρα εφαρμόζοντας την (22) για την περίπτωση της r_o έχουμε: $\Delta\rho_g + p_o = 0$ λόγω

της (22):
$$\Delta w_g = -\pi k \Delta(\rho^2) \cdot r_o^2 + \frac{1}{2}(\Delta\rho)\Phi$$

επίσης επειδή:

$$p_o = \frac{3}{4}p_b \quad \Delta p = \frac{1}{4}p_b$$

$$\Delta(p^2) = \frac{7}{16}p_b^2$$

άρα έχω επειδή:

$$p_b = \frac{\varepsilon_b}{c^2} = \frac{c^2}{8\pi k} \frac{1}{r_b^2} \quad \text{και} \quad r_b = r_o$$

και $p_o = \frac{c^4}{32\pi k} \frac{1}{r_b^2}$ από την (13)

καταλήγουμε:

$$\pi k \frac{7}{16} \left(\frac{c^2}{8\pi k} \frac{1}{r_o^2} \right)^2 r_o^2 - \frac{3}{8} \left(\frac{c^2}{8\pi k} \frac{1}{r_o^2} \right) \Phi(r_o) = \frac{c^4}{32\pi k} \frac{1}{r_o^2} \rightarrow -\frac{\Phi}{c^2} = \frac{25}{48}$$

Δηλαδή μεγαλύτερο κατά $\frac{1}{48}$ από το $\frac{1}{2}$ που αντιστοιχεί στην ακτίνα

Schwarzschild r_g η διαφορά αυτή αν και πολύ μικρή αφού προσεγγίσαμε ρελατιβιστικές καταστάσεις με κλασικό τρόπο όμως δεν είναι αμελητέα γιατί

οδηγεί σε $\Delta\Phi = \frac{c^2}{48}$ που δεν είναι καθόλου αμελητέο, και επομένως πάλι μας

οδηγεί προς την υπόθεση (1) μιας ζώνης-φλοιού που αντιστοιχεί στην διαφορά των r_g και r_o και στην περιοχή της οποίας αναγκαστικά $R=0$ αφού

ήδη από την r_g η μετρική έχει αλλοιωθεί ανεπανόρθωτα ($r=r_g$ δεν ορίζεται

και για $r < r_g$ η μετρική γίνεται θετικός αριθμός για την r και αρνητικός

αριθμός για τον χρόνο t δηλαδή στην περιοχή $r < r_g$ $g_{00} < 0$ $g_{11} > 0$ ενώ g_{22}, g_{23}

παραμένουν < 0).

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι το γεγονός ότι υπάξεως σώματος με σύνορο την ακτίνα r_g δεν εμποδίζεται από κανένα φυσικό νόμο ενώ ακριβώς το

αντίθετο συμβαίνει για την r_o αλλά επειδή η διαφορά μεταξύ τους είναι πολύ

μικρή στην ουσία μακροσκοπικά μπορούν να θεωρηθούν ότι ταυτίζονται και

έτσι στα επόμενα δεν θα γαναγίνει λόγος για την r_o μια και δεν θ'

ασχοληθούμε περισσότερο με την εσωτερική δομή ενός αστέρος (πράγμα

άλλωστε λίγο ή πολύ μάταιο για μια μελανή οπή αφού ακόμα και πληροφορίες για την επιφάνειά της δεν μπορούμε να έχουμε).

Στην ουσία όμως η r_g δεν συνδέεται με καμιά απαγόρευση από φυσικής πλευράς αλλά απλώς συνδέεται με ασυνήθιστα μάλλον φαινόμενα ακτινοβολίας βαρύτητας εξαϋλώσεως και πλήρους δεσμεύσεως των φωτεινών ακτίνων που απλώς την μετατρέπουν σε επίμαχο περιοχή ενώ αν μετρούσαμε τον t στην r και την r στον t για $r < r_g$ τότε θα είχαμε ότι για κάποιο $t < t_g$ (κάποια τιμή t_g) δεν θα μπορούσαμε να μετρήσουμε τον χρόνο δηλαδή t_g θα έπαιζε έναν ρόλο παρόντα για μας πάντα.

Τότε το «φράγμα» r_g του χώρου θα γινόταν χρονικό αλλά η μετρική μας απόλυτα κανονική και μια και το φως ποτέ δεν θα συνέδεε τα $r < r_g$ με τα $r > r_g$ ο κόσμος μας για $r < r_g$ θα ήταν απόλυτα κανονικός όπως και ο τρόπος που θα μετρούσαμε τα πράγματα σ' αυτόν.

Αφού λοιπόν στα παραπάνω προσπαθήσαμε από το εσωτερικό ενός αστέρος – σώματος να δούμε τα πράγματα στατικά και βρήκαμε ότι «κινούμενοι» έτσι μέσα στην ύλη συναντήσαμε μια περιοχή όπου κάθε άλλο παρά ισορροπία μπορούσε να υπάρχει αν όλη η κατανομή μάζας που εξετάζαμε είχε σύνορο αυτήν την περιοχή και πολύ περισσότερο μια περιοχή πιο πέρα από αυτήν. Πέρα από τις υποθέσεις που σαν παρατηρητές κάναμε για να μπορέσουμε να εξηγήσουμε τα πράγματα το γεγονός πως σ' αυτήν την περιοχή η πίεση είναι σταθερή και πάντα διάφορη από το μηδέν σημαίνει πως αν ήταν σύνορο της κατανομής θα έσπρωχνε προς τα μέσα με σταθερή δύναμη όλη τη μάζα της κατανομής ώστε το σύνορο αυτό να μην μπορεί ποτέ να γίνει σύνορο μιας κατανομής σε ισορροπία (θα γινόταν έτσι αν κατά κάποιο τρόπο ίσως με τις προηγούμενες υποθέσεις που κάναμε μπορούσε να μηδενιστεί η πίεση σ' αυτό το σύνορο αλλά θα απαιτούσε συνεχή ακτινοβολία πράγμα λίγο απίθανο για πεπερασμένες κατανομές μάζας).

Ας παρακολουθήσουμε λοιπόν τώρα πέρα από την στατική μας διερεύνηση την χρονική εξέλιξη των πραγμάτων που ουσιαστικά μας ενδιαφέρει μια και από ένα σημείο και πέρα τίποτα στατικό δεν μπορεί να υπάρχει για έναν αστέρα με μάζα $> 1,2m_\odot$ μέχρι την εξάντληση των πυρηνικών του καυσίμων. Θεωρώντας σφαιρική συμμετρία και μη λαμβανομένης υπ' όψη της περιστροφής του αστέρος έχουμε:

Η πιο γενική σφαιρικά συμμετρική μορφή του ds^2 είναι:

$$ds^2 = h(r,t)dr^2 + k(r,t)(\sin^2 \theta d\Phi^2 + d\theta^2) + \ell(r,t)dt^2 + \alpha(r,t)drdt.$$

Έχοντας από τη θεωρία της σχετικότητας την ελευθερία της εκλογής του συστήματος αναφοράς με τον περιορισμό να μην αντιβαίνει στην αρχική μου

υπόθεση της σφαιρικής συμμετρίας ή το αυτό να μην αλλοιώνει την σφαιρική συμμετρία του ds^2 έχω ότι μπορώ να επιλέξω σύστημα

$$r = f_1(r', t') \quad t = f_2(r', t')$$

με f_1, f_2 οποιεσδήποτε συναρτήσεις των (r', t') τότε διαλέγοντας έτσι ώστε $a(r, t) = 0$ και $k(r, t) = -r^2$ (που σημαίνει πως το μήκος περιφερείας ενός κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων θα είναι $2\pi r$).

Θέτοντας $h(r, t) = e^\lambda \quad \ell(r, t) = e^\nu$ έχω:

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 (\sin^2 \theta d\Phi^2 + d\theta^2)$$

$$\begin{aligned} g_{00} &= e^\nu & g_{11} &= -e^\lambda & g_{22} &= -r^2 & g_{33} &= -r^2 \sin^2 \theta \\ g^{00} &= e^{-\nu} & g^{11} &= -e^{-\lambda} & g^{22} &= -r^{-2} & g^{33} &= -r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{aligned}$$

υπολογίζω τα σύμβολα του Christoffel

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\lambda'}{2} \quad \Gamma_{10}^0 = \frac{\nu'}{2} \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta$$

$$\Gamma_{11}^0 = \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu} \quad \Gamma_{11}^1 = -r e^{-\lambda} \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{\nu'}{2} e^{\lambda-\nu}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} \quad \Gamma_{23}^3 = \cot \theta \quad \Gamma_{00}^0 = \frac{\dot{\nu}}{2}$$

$$\Gamma_{10}^1 = \frac{\dot{\lambda}}{2} \quad \Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \theta e^{-\lambda}$$

όπου όλα τα άλλα $\Gamma_{k\ell}^i$ είναι μηδέν εκτός από εκείνα που αντιστοιχούν στους ίδιους κάτω δείκτες με τη σχέση $\Gamma_{k\ell}^i = \Gamma_{\ell k}^i$ από τις εξισώσεις του Einstein έχουμε:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik}$$

υπολογίζουμε τις μεικτές συνιστώσες T_i^k του T_{ik}

$$\frac{8\pi k}{c^4} T_o^o = -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} \quad (23)$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} T_o^1 = -e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r} \quad (24)$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} T_1^1 = -e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{8\pi k}{c^4} T_2^2 &= \frac{8\pi k}{c^4} T_3^3 = -\frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda}{r} - \frac{\nu' \lambda'}{2} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} e^{-\nu} \left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{2} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

όπου $\bullet$ σημαίνει $\frac{\partial}{c\partial t}$ και r σημαίνει $\frac{\partial}{\partial r}$ ενώ οι άλλες συνιστώσες του T_i^k εξαφανίζονται εκ ταυτότητας ίσες με μηδέν.

Έξω από την όλη στο κενό παίρνουμε την εξωτερική λύση του Schwarzschild

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 + \frac{\sigma \alpha \vartheta}{r} \quad (27)$$

και με την απαίτηση σε μεγάλες αποστάσεις οι εξισώσεις πεδίου την Νευτώνεια προσέγγιση έχουμε:

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 - \frac{2km}{c^2 r} \quad (28)$$

όπου η βαρυτική ακτίνα $r_g = \frac{2km}{c^2}$ και έχουμε την μορφή της μετρικής Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r} c^2 dt^2\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} - r^2 (\sin^2 \vartheta d\phi^2 + d\vartheta^2)$$

με ολοκλήρωση των παραπάνω εξισώσεων έχουμε:

$$\lambda = -\ell u \left\{ 1 - \frac{8\pi k}{c^4 r} \int_0^r T_o^o r^2 dr \right\}$$

και από την σχέση

$$T_o^o = g^{oi} T_{oi} \rightarrow T_o^o = e^{-\nu} T_{oo} \geq 0 \rightarrow \lambda \geq 0 \text{ ή } e^{\lambda} \geq 1$$

αφαιρώντας τις εκφράσεις για τα T_o^o και T_1^1 έχουμε σε συνδυασμό με την έκφραση του τανυστή κινητικής ενεργείας

$$\frac{e^{-\lambda}}{r} (\nu' + \lambda') = \frac{8\pi k}{c^4} (T_o^o - T_1^1) = \frac{(\varepsilon + p) \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \geq 0$$

επειδή για $r \rightarrow \infty$ η μετρική μεταπίπτει σε γαλιλαϊκή έπεται $r \rightarrow \infty$, $\nu \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0$ άρα για όλο το διάστημα $\nu + \lambda \leq 0$ και επειδή $\lambda \geq 0 \rightarrow \nu \leq 0$ ή $e^{\nu} \leq 1$

η μάζα του συστήματος βρίσκεται $m = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^\infty T_o^o r^2 dr$ όπου $\propto$ η ακτίνα της

σφαιρικής κατανομής.

Επειδή $T_o^o = \varepsilon$ έχουμε:

$$m = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^\infty \varepsilon r^2 dr$$

και παρατηρούμε επειδή ο πραγματικός όγκος του άστρου είναι

$$v = \int_0^{\infty} 4\pi r^2 e^{\lambda/2} dr$$

ότι $dV = 4\pi r^2 e^{\lambda/2} dr$ και ότι αν ολοκληρώσουμε $m^* = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^{\infty} r^2 e^{\lambda/2} dr$

επειδή $e^{\lambda} \geq 1 \rightarrow m^* \geq m$

η διαφορά $m^* - m = \Delta m$ φανερώνει ένα έλλειμμα μάζας του σώματος οφειλόμενο στο πεδίο.

Επειδή οι εξισώσεις του πεδίου δεν ολοκληρώνονται για το εσωτερικό του αστέρος παρά μόνο με κάποια βοηθητική σχέση ίσως μια εξίσωση καταστάσεως βλέπουμε πως για την περίπτωση βαρυτικής καταρρεύσεως που εξετάζουμε πλεονεκτεί να θέσουμε $p=0$ για την πίεση οπότε βρισκόμαστε στην περίπτωση ελευθέρως βαρυτικής καταρρεύσεως της ύλης και μας δίνει ένα πολύ αντιπροσωπευτικό μοντέλο ακόμα και όταν η πίεση δεν είναι μηδέν αλλά η μάζα αρκετά μεγάλη για να προκαλέσει κατάρρευση.

Χρησιμοποιούμε την δυνατότητα μέσω των εξισώσεων του Einstein όταν $p=0$ να είναι δυνατόν να αποκαταστήσουμε συγχρονισμό παράλληλα με την συμμετοχή μας στην κίνηση της ύλης (synchronous and comoving system). Τότε έχουμε μια μορφή του ds^2

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - e^{\lambda(\tau, R)} dR^2 - r^2(\tau, R) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Phi^2)$$

η συνάρτηση $r = r(\tau, R)$ ορίζεται έτσι ώστε το μήκος της περιφέρειας κύκλου που γράφεται με κέντρο την αρχή των αξόνων να είναι $2\pi r$. Η R είναι μια spatial καθαρά συντεταγμένη τ είναι ο ακριβής χρόνος (proper time) οι εξισώσεις του Einstein με $T_i^k = 0$ για κάθε k, i εκτός από $T_o^o = \varepsilon$ δίνουν μετά

τον υπολογισμό των $T_{k\ell}^i$ και την αντικατάσταση στις $R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik}$

$$-e^{-\lambda} r'^2 + 2r\ddot{r} + \dot{r}^2 + 1 = 0 \quad (29)$$

$$\frac{-e^{-\lambda}}{r} (2r'' - r'\lambda') + \frac{\dot{r}\dot{\lambda}}{r} + \ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} + \frac{2\ddot{r}}{r} = 0 \quad (30)$$

$$\frac{-e^{-\lambda}}{r} (2rr'' - r'^2 - rr'\lambda') + \frac{1}{r^2} (r\dot{r}\dot{\lambda} + \dot{r}^2 + 1) = \frac{8\pi k}{c^4} \varepsilon \quad (31)$$

$$2\dot{r}' - \dot{\lambda}r' = 0 \quad (32)$$

όπου $\cdot$ σημαίνει $\frac{\partial}{c\partial\tau}$ και r σημαίνει $\frac{\partial}{\partial R}$ η (32) ολοκληρώνεται αμέσως ως προς τον χρόνο και δίνει:

$$e^{\lambda} = \frac{r'^2}{1 + f(R)} \quad (33)$$

όπου $f(R)$ κάποια συνάρτηση του R η οποία ικανοποιεί την συνθήκη

$$1 + f(R) > 0 \quad (34)$$

αντικαθιστώντας την (33) στην (29) έχουμε:

$$2r\ddot{r} + \dot{r}^2 - f(R) = 0 \quad (35)$$

και ολοκλήρωση της (35) δίνει:

$$\dot{r}^2 = f(R) + \frac{\varphi(R)}{r} \quad (36)$$

όπου $\varphi(R)$ τυχαία συνάρτηση του R και

$$c\tau = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{f(R) + \frac{\varphi(R)}{r}}} \quad (37)$$

αποδεικνύεται (Landau) ότι η συνάρτηση $r(r, R)$ που προκύπτει από αυτήν την ολοκλήρωση μπορεί να γραφεί σε παραμετρική μορφή:

$$r = \frac{\varphi(R)}{2f(R)} (\cosh n - 1), \quad c\tau_o(R) - c\tau = \frac{\varphi(R)}{2[f(R)]^{3/2}} (\sinh n - n)$$

$$\text{για } f(R) > 0 \quad (38)$$

$$\text{ή } r = \frac{\varphi(R)}{-2f(R)} (1 - \cos n), \quad c\tau_o(R) - c\tau = \frac{\varphi(R)}{2[-f(R)]^{3/2}} (n - \sin n)$$

$$\text{για } f(R) < 0 \quad (39)$$

όπου $\tau_o(R)$ τυχαία συνάρτηση του R . Αν $f(R) = 0$ έχουμε:

$$r = \left[\frac{9\varphi(R)}{4} \right]^{1/3} \cdot [c\tau_o(R) - c\tau]^{2/3}$$

$$\text{για } f(R) = 0 \quad (40)$$

αλλά για οποιαδήποτε από τις παραπάνω περιπτώσεις αντικαθιστώντας στην (31) την (33) και απαλείφοντας την $f(R)$ με την βοήθεια της (36) έχουμε:

$$\frac{8\pi k}{c^4} \varepsilon = \frac{\varphi'(R)}{r'r^2} \quad (41)$$

Από την (35) βρίσκω μια προσεγγιστική σημασία της $f(R)$. Επειδή

$2r\ddot{r} + \dot{r}^2 - f(R) = 0 \rightarrow r\ddot{r} + \frac{\dot{r}^2}{2} = \frac{1}{2} f(R)$ πολλαπλασιάζοντας επί $p = \frac{\varepsilon}{c^2}$ η πυκνότητας έχω:

$$pr\ddot{r} + p\frac{\dot{r}^2}{2} = \frac{1}{2} pf(R)$$

που μου λέει ότι η $\frac{1}{2} pf(R)$ είναι ένα μέτρο της εξωτερικής πίεσεως στο

σημείο r (η εξίσωση μοιάζει με την εξίσωση ($gr + p \frac{v^2}{2} + P_{\varepsilon^{\xi}} = 0$) για $g = \dot{r}$) άρα επειδή έχω υποθέσει $p = 0 \rightarrow P_{\varepsilon^{\xi}} = 0$ για κάθε σημείο και επομένως μάλλον $f(R)=0$.

Άρα θέτω $f(R)=0$ παραδεχόμενος τα παραπάνω και τότε έχω την παραμετρική μορφή της $r(R, \tau)$ (40), (η ίδια προσέγγιση $f(R)=0$ έγινε και από τους Oppenheimer και Snyder και αργότερα περιλαμβάνεται και σε χειρισμό του Landau).

Με βάση την σχέση μετασχηματισμού της μετρικής δηλαδή του μετρικού τανυστή έχω:

$$g^{ik} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{\ell'}} + \frac{\partial x^k}{\partial x^{m'}} g^{\ell m'}$$

και μεταβαίνω σ' ένα σύστημα με:

$$ds^2 = e^{\nu} c^2 dt^2 - e^{\mu} dr^2 - r^2 (\sin^2 \theta d\varphi^2)$$

$$\begin{aligned} \text{βρίσκω} \quad g^{00} &= e^{-\nu} = c^2 \dot{t}^2 - \frac{c^2 t'^2}{r'^2} \\ g^{11} &= -e^{-\mu} = -(1 - \dot{r}^2) \\ g^{12} &= -r^{-2} \\ g^{33} &= -r^{-2} \sin^2 \theta \\ g^{01} &= \dot{r} - \frac{t'}{r'} = 0 \end{aligned}$$

που η τελευταία με οδηγεί σε μορφή

$$e^{\nu} = \frac{1}{c^2 \dot{t}(1 - \dot{r}^2)} \quad e^{\mu} = \frac{1}{1 - \dot{r}^2}$$

όπου επειδή για μεγάλα r πρέπει να μου δίνει την μετρική Schwarzschild έχω:

$$\dot{r}^2 = \frac{r_g}{r} \quad \text{όπου εν γένει } r_g = r_g(R)$$

και $c^2 \dot{t}^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^2}$ που μου καθορίζουν την μορφή του $\varphi(R) = r_g(R)$ όταν

$f(R)=0$ είναι $r_g(R)$ γιατί η κατανομή αλλάζει συνεχώς σύνορο καθώς $r \rightarrow \infty$. Ολοκληρώνοντας την (41) έχω:

$$m = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^{r(r, R_0)} \varepsilon r^2 dr = \frac{4\pi}{c^2} \int_r^{R_0} \varepsilon r^2 r' dR$$

m η ολική μάζα του συστήματος επειδή όταν η σφαίρα έχει ακτίνα $R=0$ η $r_g=0$ έχω $\varphi(0)=0$ και επομένως $\varphi(R_o)=\frac{2km_{tot}}{c^2}=r_g(R_o)$ όπου R_o το σύνορο της κατανομής.

Για $\varphi(R) = σταθ. \neq 0$ έχουμε $\varepsilon=0$ έτσι η μορφή $\varphi(R)=0$ εφαρμόζεται στον κενό χώρο δηλαδή περιγράφει το πεδίο μιας σημειακής μάζας στην αρχή των αξόνων στο μη ομαλό σημείο της μετρικής. Επειδή οι εξισώσεις (38) (39) (40) περιγράφουν τόσο κατάρρευση όσο και έκρηξη της σφαίρας (ανάλογα με την περιοχή τιμών της παραμέτρου η) είναι και οι 2 περιπτώσεις εξ' ίσου σφικτές από πλευράς εξισώσεων πεδίου.

Για την υπόψη περίπτωση της συμπεριφοράς ασταθούς μαζικού αστερός που καταρρέει υπό την επίδραση της βαρύτητός του ελευθέρως ($p=0$) έχουμε ότι η κατάρρευση συμβαίνει καθώς $\tau \rightarrow \tau_o(R)$ και στη στιγμή $\tau = \tau_o(R)$ η μάζα με ακτινική συνιστώσα R φθάνει στο κέντρο. Είναι φυσικό $\tau'_o(R) > 0$.

Η εσωτερική κατάσταση της σφαίρας κατά την κατάρρευση περιγράφεται όμοια και για τις 3 εξισώσεις (38),(39),(40) με τις εκφράσεις:

$$r \approx \left(\frac{9\varphi(R)}{4} \right)^{\frac{1}{3}} (c\tau_o - c\tau)^{\frac{2}{3}} \quad (42)$$

$$e^{\frac{1}{2}} \approx \left(\frac{2\varphi}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{c\tau'_o}{\sqrt{1+f(R)}} (c\tau_o - c\tau)^{\frac{1}{3}} \quad (43)$$

όταν $\tau \rightarrow \tau_o$

που σημαίνει ότι στο σύστημα που χρησιμοποιούμε που κινείται με την ύλη έχουμε ότι: καθώς οι ακτινικές συνιστώσες τείνουν στο μηδέν οι εφαπτομενικές τείνουν στο άπειρο και αντίστροφα όταν οι ακτινικές τείνουν στο άπειρο, οι εφαπτομενικές συνιστώσες τείνουν στο μηδέν

$$\eta \text{ έκφραση } \frac{8\pi k}{c^4} \varepsilon = \left(\frac{2\varphi'(R)}{3\varphi(R) \cdot c\tau'_o (c\tau_o - c\tau)} \right) \quad (44)$$

δείχνει πως η $\varepsilon \rightarrow \infty$ καθώς $\tau \rightarrow \tau_o$ δηλαδή η πυκνότητα αυξάνει χωρίς όριο δηλαδή βλέπουμε ότι όλη η μάζα καταρρέει προς το κέντρο ($\tau=0$) ενώ κατά την χρονική στιγμή $\tau_o(R)$ για κάθε R η αντίστοιχη μάζα περνά στην οριακή κατάσταση $\varepsilon = \infty$ $r = 0$.

Επειδή ενδιαφερόμαστε για τον ολικό χρόνο της καταρρεύσεως θεωρούμε τον εξωτερικό φλοιό της σφαίρας που καταρρέει τότε όλα τα σωμάτια, δηλαδή η ύλη, του φλοιού φθάνουν στο κέντρο συγχρόνως.

Τότε θέτω $\tau_o(R) = σταθ.$ τότε η μετρική στο εξωτερικό της σφαίρας έχει διαφορετικό χαρακτήρα και έχω τις εκφράσεις:

$$r \cong \left(\frac{9\varphi}{3}\right)^{1/3} (c\tau_o - c\tau)^{2/3} \quad (45)$$

$$e^{1/2} \cong \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} \frac{\varphi'}{2\varphi^{2/3}\sqrt{1+f}} (c\tau_o - c\tau)^{2/3} \quad (46)$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} \varepsilon = \frac{4}{3(c\tau_o - c\tau)^2} \quad (47)$$

που μου δείχνουν ότι και οι ακτινικές και οι εφαπτομενικές αποστάσεις τείνουν στο μηδέν με τον ίδιο νόμο $\sim (c\tau_o - c\tau)^{2/3}$ ενώ η πυκνότητα τείνει στο άπειρο $\sim (c\tau_o - c\tau)^{-2}$.

Από την (47) με αρχή των χρόνων για κάποια αρχική τιμή της πυκνότητας

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_{αρχ} , \quad \tau = \tau_{αρχ} = 0 \\ \text{έχω} \quad \tau_o &= \frac{1}{\sqrt{6\pi k p_{αρχ}}} \end{aligned} \quad (48)$$

Τέλος θεωρώντας ότι στην αρχή κάποια σημειακή μάζα βρισκόταν στην θέση $r=0$ δηλαδή μια σημειακή μάζα κατείχε το κέντρο της κατανομής τότε πρέπει να μετατρέψουμε έτσι ώστε $\varphi(R) = r_g = σταθ.$ και θέτοντας

$$f(R) = -\frac{1}{1 + (R/r_g)^2} \quad (49)$$

$$c\tau_o = \frac{\pi}{2} r_g (-f(R))^{-3/2} \quad (50)$$

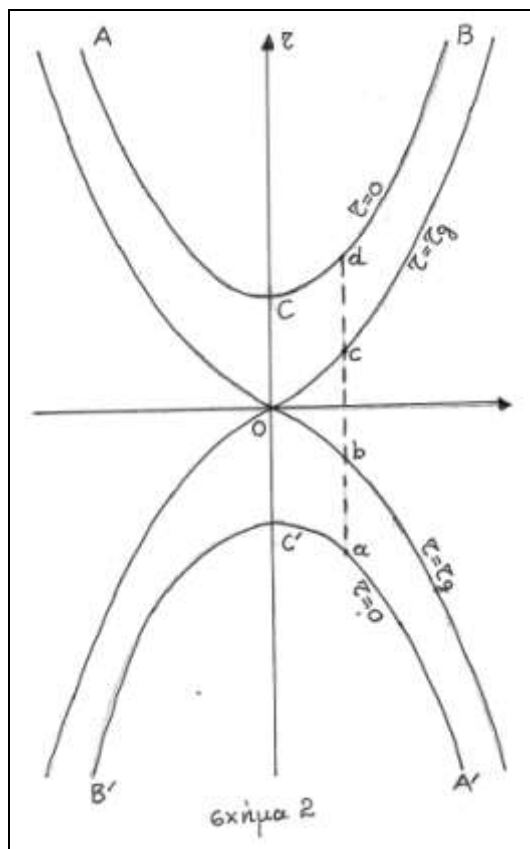
$$\frac{r}{r_g} = \frac{1}{2} r_g \left(\left(\frac{R}{r_g} \right)^2 + 1 \right) (1 - \cos n) \quad (51)$$

$$\text{και} \quad \frac{c\tau}{r_g} = \frac{1}{2} \left(\frac{R^2}{r_g^2} + 1 \right)^{3/2} (\pi - n + \sin n) \quad (52)$$

με $0 \leq n \leq 2\pi$ ο τ ελαττώνονται μόνιμα όταν η τ αυξάνει από το 0 προς κάποια μέγιστη τιμή ενώ η r μπορεί να λάβει τιμές $0 \leq r \leq r_{\max}$.

Στο σχήμα φαίνονται οι καμπύλες ACB , $A'C'B'$ που αντιστοιχούν σε $r=0$ ($n=2\pi$ και $n=0$ της παραμέτρου).

Οι καμπύλες AOA' και BOB' αντιστοιχούν στην σφαίρα Schwarzschild $r=r_g$ της σημειακής μάζας. Μεταξύ των $A'C'B'$ και $A'OB'$ είναι η χωροχρονική περιοχή όπου μόνο κίνηση από το κέντρο προς τα έξω είναι δυνατή, ενώ το μεταξύ ACB και AOB τμήμα είναι περιοχή όπου μόνο κίνηση προς το κέντρο είναι δυνατή.



Η κοσμική γραμμή ενός σωματίου που βρίσκεται σε ηρεμία ως προς αυτό το σύστημα είναι μια ευθεία γραμμή $R=\text{σταθ.}$ αρχίζει από $r=0$ (σημείο a) τέμνει την σφαίρα Schwarzschild στο σημείο b φτάνει στη μέγιστη του απόσταση $r_{\max} = rg \left(\frac{R^2}{rg^2} + 1 \right)$ σε χρόνο $\tau=0$ και μετά αρχίζει πάλι να πέφτει προς την σφαίρα Schwarzschild την συναντά στο σημείο c και φθάνει πάλι στο $r=0$ (στο σημείο d) σε χρόνο $\tau = rg \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{R^2}{rg^2} \right)^{3/2}$.

Το σύστημα αναφοράς αυτό φαίνεται να είναι πλήρες γιατί και η αρχή και το τέλος κάθε κοσμικής γραμμής βρίσκονται ή πάνω στην πραγματική singularity $r=0$ ή στο άπειρο (άξονας R πρακτικά εννοούμε $r_{\max}$).

Η μετρική Schwarzschild καλύπτει μόνο το τμήμα δεξιά των BOA' ή αριστερά του AOB' (δηλαδή τα $r > r_g$).

Έτσι με τον παραπάνω τρόπο θεωρώντας βλέπουμε ότι αντιστρέφοντας τον χρόνο σε μια βαρυτική κατάρρευση έχουμε μια έκρηξη (περιοχή $\tau \leq 0$ κάτω του άξονος R).

Ακόμα ότι παρ' όλο ότι κάθε μας πληροφορία σταματά μέχρι την σφαίρα Schwarzschild όμως αυτό δεν εμποδίζει την ύλη να φθάσει στην πραγματικά

χωροχρονικά μη ομαλή περιοχή του $r=0$ και μάλιστα σε πεπερασμένο χρόνο

$$\tau = rg \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{R^2}{rg^2} \right)^{3/2}$$
 για τον εαυτό της. Αντίθετα έξω από την καταρρέουσα ύλη

βλέπει τον χρόνο να απειρίζεται και αντιμετωπίζει το φράγμα της σφαίρας Schwarzschild και του «παγωμένου» χωροχρόνου γενικότερα. Είναι φανερό πως το παραπάνω σύστημα και η μετρική που αντιστοιχεί στις εξισώσεις (49)-(52) και στο Σχ. 2 αποτελούν επίσης και την πλήρη μετρική του πεδίου βαρύτητας μιας σημειακής μάζας και επομένως δείχνουν και έναν τρόπο με τον οποίο η ίδια η «singularity» «βλέπει» τα πράγματα.

Οι προεκτάσεις του γεγονότος αυτού όμως ανήκουν σε γενικότερο πλαίσιο που πρέπει να τοποθετηθεί μετά την παράγραφο για τις μελανές οπές.

Προς το παρόν ας σταθούμε στο γεγονός ότι η ύλη καταρρέει σ' ένα άστρο $m > 1,2m_{\odot}$ και είδαμε σε μια προσέγγιση όπου η πίεση δεν λήφθηκε υπ' όψη ($p=0$) ούτε η περιστροφή του άστρου (σφαιρική συμμετρία) ότι το άστρο (γενικά η κατανομή της μάζας με σφαιρική συμμετρία) τείνει τότε προς μια κατάσταση μηδενικής ακτίνας και απείρου πυκνότητας που της έχει δοθεί διεθνώς το πολύ χαρακτηριστικό όνομα *singularity* (μοναδικότητα) ή από τη μαθηματική άποψη μή ομαλότης ή ανώμαλο σημείο λόγω ακριβώς της εκεί ανατροπής των φυσικών νόμων που συνίσταται σε άπειρες δυνάμεις βαρύτητας άπειρη πυκνότητα, άπειρη καμπυλότητα του χώρου και η οποία κατάσταση, λόγω της διαρκούς υπάρξεως πίεσεως που δεν είναι δυνατόν να μηδενιστεί στο σύνορο της σφαίρας Schwarzschild (εξίσωση (13) για το $r_o = \frac{\sqrt{3}}{2} r_g$ που είναι περίπου $\tau_o \approx r_g$) αφ' ότου η ύλη του σώματος περάσει αυτό το σύνορο (r_g), δεν είναι δυνατόν να αποτραπεί.

Η βιαιότητα του φαινομένου της βαρυτικής κατάρρευσης μπορεί να προσεγγισθεί από την εξίσωση (48) για τον χρόνο εντός του οποίου συμβαίνει: $\tau_o \cong 81,63 \cdot \frac{1}{\sqrt{p}}$ p η αρχική πυκνότητα του εξωτάτου φλοιού του

αστέρος σε gr/cm^3 και r_o σε sec. Ενώ μια μετατροπή του τύπου συναρτήσκει της ακτίνας μας δίνει από την σχέση (8) για το σύνορο της κατανομής (ακτίνα του αστέρος) $\tau_o = \frac{2r_b}{\sqrt{3}c}$ όπου r_b ($r_{boundary}$) η ακτίνα τους αστέρος. Τότε βρίσκουμε

ότι ένας αστέρας με την ακτίνα του ηλίου θα κατάρρει εντός χρόνου $\tau_o \cong 0,28$ sec και επειδή η αλληλεπίδραση της ύλης και η διάφορος του μηδενός πίεση επιταχύνουν το φαινόμενο ενώ η περιστροφή του αστέρος του καταστρέφουν την σφαιρική συμμετρία θα είχαμε πολύ μικρότερο χρόνο (τελευταίες γνώμες τον προσδιορίζουν σε χιλιοστά του sec) και ασύμμετρη

κατάρρευση ως προς τις διάφορες διευθύνσεις κατά τον άξονα περιστροφής και λιγότερο ταχεία κατά τον ισημερινό του αστέρος. Πάντως σε οποιαδήποτε περίπτωση η μέση ταχύτητα καταρρεύσεως $\frac{r_b}{\tau_o} = \frac{\sqrt{3}}{2}c \simeq 0,866c$

είναι τρομακτική και φανερώνει επίσης και την όλη χωροχρονική διαταραχή που προκαλείται όχι μόνο από το αποτέλεσμα ($r=0$) αλλά και κατά τη διάρκεια του φαινομένου αυτού.

Καταλήγοντας και συνοψίζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι καταρρέοντας η ύλη ενός αστέρος μας δίνει ένα σώμα που κάθε άλλο παρά αστέρας μπορεί να θεωρηθεί πλέον μια και η συρρίκνωση του πέρα από την ακτίνα Schwarzschild δεν επιτρέπει ούτε στο φως ούτε σε καμιά άλλη ακτινοβολία να απομακρύνεται από αυτό και που τα μόνα «δείγματα» υπάρξεως είναι η ασταμάτητη ροή ύλης προς αυτό και η ακτινοβολία βαρύτητας του που μπορεί να παρομοιασθεί με μια διαδιδόμενη στο χώρο και στο χρόνο χωροχρονική «ανωμαλία» εκφραζόμενη με την περιοδική ή όχι μεταβολή της καμπυλότητας του χώρου σε μεγάλες αποστάσεις από το σώμα υπό μορφή κύματος. Ένα τέτοιο σώμα σαν κι' αυτό που περιγράψαμε αμέσως πριν είναι μια μελανή οπή.



Μελανές Οπές

Εισαγωγή*

*Βλέπε: *Το Σύμπαν που αγάπησα-Εισαγωγή στην Αστροφυσική*, Μάνος Δανέζης και Στράτος Θεοδοσίου, Εκδόσεις Διάυλος, Αθήνα 1999

Αν μετά την έκρηξη ενός υπερκαινοφανούς και την εκτόξευση μεγάλης ποσότητας ύλης στον μεσοαστρικό χώρο, η μάζα που απομένει είναι μεγαλύτερη από 3,2 ηλιακές μάζες ($M > 3,2M_{\odot}$), ο αστέρας δεν μπορεί να ισορροπήσει ούτε ως λευκός νάνος ούτε ως αστέρας νετρονίων. Τότε, επειδή δεν υπάρχει εσωτερική πίεση ικανή να αντισταθμίσει τη συντριπτική δύναμη της βαρύτητας, η κατάρρευση του πυρήνα του θα γίνει τόσο γρήγορα, ώστε θα καταλήξει σε μια υπέρπυκνη κατάσταση με άπειρη, θεωρητικά, πυκνότητα. Το βαρυτικό πεδίο που απομένει είναι εξαιρετικά ισχυρό, ώστε να καταπίνει ό,τι βρεθεί στη γύρω περιοχή, μέχρι μια απόσταση από αυτό, που αποκαλείται *ορίζοντας γεγονότων*. Η κατάσταση αυτή ονομάζεται *μελανή οπή* ή *μαύρη τρύπα* (*black hole*), μια ονομασία την οποία επινόησε ο Αμερικανός αστρονόμος και καθηγητής στο Princeton John Archibald Wheeler, προκειμένου να περιγραφεί αυτό το τεράστιας μάζας και πυκνότητας σημειακό αστρικό σώμα*.

* Φυσικά, η μαύρη τρύπα δεν είναι κυριολεκτικά μια τρύπα. Η ονομασία της προήλθε από τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, αφού οι μαύρες τρύπες αποτελούν μια εκπληκτική και αναπότρεπτη πρόβλεψη της θεωρίας αυτής, σύμφωνα με την οποία το πεδίο βαρύτητάς της είναι τόσο ισχυρό, ώστε τα φωτόνια δεν μπορούν να διαφύγουν· δηλαδή τα σώματα αυτά είναι —και θα παραμένουν στο εξής για πάντα— αόρατα, μαύρα. Επειδή, λοιπόν, απορροφούν οτιδήποτε προσεγγίσει το ισχυρό βαρυτικό πεδίο τους παρομοιάζονται με τρύπες.

Το πεδίο βαρύτητας του νεκρού αυτού άστρου είναι τόσο ισχυρό, ώστε ούτε ακτινοβολία ούτε άλλα σωμάτια μπορούν να διαφύγουν από αυτό και να φτάσουν σε μας. Συνεπώς η ονομασία μαύρη τρύπα οφείλεται ακριβώς στο γεγονός ότι το βαρυτικό πεδίο της είναι τόσο ισχυρό ώστε δεν μπορεί να διαφύγει ούτε καν το φως. Δηλαδή αυτό το ουράνιο σώμα είναι σκοτεινό, μαύρο. Οι μαύρες τρύπες, λοιπόν, θα πρέπει να είναι αόρατες. Η πρόβλεψή τους έγινε από τη Θεωρία της Σχετικότητας και φυσικά η διαπίστωση της υπαρξής τους στο διάστημα γίνεται μόνο έμμεσα, συνήθως από τις πολύ μεγάλες ταχύτητες που αποκτά η ύλη όταν πλησιάζει σε μια μελανή οπή. Τα τελευταία χρόνια γίνονται προσπάθειες για τον εντοπισμό τους, αφού, σύμφωνα με τις σημερινές θεωρητικές απόψεις, μαύρες τρύπες πολύ μεγάλων

μαζών 10^6 - 10^9 $M_\odot$ — βρίσκονται στο κέντρο κάθε ενεργού γαλαξία ή κβάζαρ (βλέπε σελίδα...).

Ας παρακολουθήσουμε όμως πιο αναλυτικά τη βαρυτική κατάρρευση ενός άστρου και τη μετατροπή του σε μαύρη τρύπα.

Καθώς το άστρο καταρρέει, η ακτίνα του θα φτάσει κάποτε την τιμή που προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$R=2\cdot GM/c^2$$

όπου $G=6,67\times 10^{-8}$ $\text{gr}^{-1} \text{cm}^3 \text{sec}^{-2}$ η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας, M η μάζα του αστεριού και c η ταχύτητα του φωτός.

Όταν η ακτίνα του άστρου φτάσει αυτή την τιμή, η Θεωρία της Σχετικότητας προβλέπει ότι το τεράστιο βαρυτικό πεδίο που δημιουργείται γύρω από το άστρο δεν επιτρέπει στο φως του να ξεφύγει πέρα από τα όρια της ακτίνας ή, για να χρησιμοποιήσουμε μια ακριβέστερη έκφραση, το φως χρειάζεται άπειρο, θεωρητικά, χρόνο για να προσεγγίσει αυτή την απόσταση.

Η προαναφερόμενη ακτίνα αυτή ονομάζεται *ακτίνα Schwarzschild* της μάζας M , η οποία λόγω κατάρρευσης, αν βρεθεί μέσα σ' αυτό το όριο, γίνεται αυτομάτως αόρατη. Συνεπώς η ακτίνα Schwarzschild είναι η κρίσιμη ακτίνα στην οποία πρέπει να συμπιεστεί μια μάζα ώστε να σχηματίσει μια μαύρη τρύπα. Η ονομασία της οφείλεται στον σπουδαίο Γερμανό αστροφυσικό Karl Schwarzschild (1873-1916), ο οποίος στις αρχές του 1916 με τη νέα, τότε, θεωρία της βαρύτητας του A. Einstein (1879-1955) υπολόγισε την ακριβή μαθηματική έκφρασή της.

Μετά τον K. Schwarzschild, ο διάσημος Αμερικανός πυρηνικός φυσικός Robert Oppenheimer (1904-1967) και ο συνεργάτης του Hartland Snyder, το 1939, απέδειξαν θεωρητικά ότι ένα άστρο που έχει εξαντλήσει τα πυρηνικά του αποθέματα, όπως για παράδειγμα ένας αστέρας νετρονίων με μάζα αρκετές ηλιακές μάζες, είναι βέβαιο ότι θα καταρρεύσει και θα σχηματίσει μια μελανή οπή.

Σύμφωνα με την αντίστοιχη θεωρία, η σφαιρική επιφάνεια η οποία ορίζεται από την ακτίνα *Schwarzschild* και κρύβει από τα μάτια κάθε παρατηρητή την αστρική μάζα που συνεχίζει να καταρρέει, ονομάζεται *ορίζοντας γεγονότων της μελανής οπής*.

Σε μια μελανή οπή με μάζα ίση με του Ήλιου μας —αν μπορούσε βέβαια να σχηματιστεί— η ακτίνα *Schwarzschild* θα ισούται με 2,95 Km, για μάζα ίση με εκείνη της Γης μόλις 0,88 cm, ενώ για μια γαλαξιακή μάζα ίση με 10^{12} $M_\odot$ ισούται με 12 ε.φ. Αυτό σημαίνει ότι αν ολόκληρη η μάζα του Ήλιου συστελλόταν τόσο, ώστε να χωρέσει μέσα σ' αυτό το όριο, τότε ο Ήλιος θα ήταν αυτομάτως αόρατος από εμάς. Κάτι τέτοιο όμως δεν θα συμβεί, διότι,

όπως έχουμε αναφέρει ήδη, η μάζα του Ήλιου δεν είναι τόσο μεγάλη ώστε να τελειώσει την αστρική του ζωή σαν μια μαύρη τρύπα.

Η βαρυτική όμως κατάρρευση του αστεριού δεν σταματά εδώ, αλλά συνεχίζεται μέχρι να συμβεί το λογικώς αδύνατον, να συνθλιβεί δηλαδή προς το αισθητό *τίποτα*, πέφτοντας σε ένα πολύ περίεργο σημείο της μαύρης τρύπας, τη *σημειακή ανωμαλία* (σημειακή ιδιομορφία).

Το θεώρημα του Penrose

Όπως απέδειξε θεωρητικά ο R. Penrose, «αν μια μάζα είναι τόσο μεγάλη ώστε καταρρέουσα να σχηματίσει έναν ορίζοντα γεγονότων, τότε η βαρύτητα αναπόφευκτα θα δημιουργήσει μέσα σ' αυτόν μια χωροχρονική ανωμαλία». Με βάση το προηγούμενο θεώρημα θεωρείται δεδομένο ότι ο ορίζοντας γεγονότων μιας μελανής οπής αγκαλιάζει και περιβάλλει πάντα μια σημειακή ιδιομορφία.

Η διαπίστωση αυτή δημιούργησε μια σειρά από ερωτήματα όπως:

1. Η σημειακή ιδιομορφία τελικά καταπίνει καθετί που περνάει τον ορίζοντα γεγονότων της μελανής οπής; Η άποψη αυτή είναι η επικρατέστερη σήμερα, αλλά χωρίς να είμαστε απόλυτα βέβαιοι.
2. Υπάρχει τρόπος ώστε το υλικό που εγκλωβίζεται μέσα στα όρια του ορίζοντα γεγονότων μιας μελανής οπής να διαφύγει προς άλλες περιοχές του δικού μας Σύμπαντος, ή ενός παράλληλου με αυτό;
3. Ποια είναι η φύση και η περαιτέρω εξέλιξη του υλικού που πέφτει μέσα σε μια σημειακή ιδιομορφία;

Πρώτοι οι Oppenheimer και Snyder έδωσαν μια κατηγορηματική απάντηση στα προηγούμενα ερωτήματα, στην περίπτωση κατάρρευσης ενός μεγάλης μάζας, αλλά ιδανικού, ως προς τη φύση και τη δομή και απολύτως σφαιρικού άστρου. Τότε όπως υπολογίστηκε:

1. Κάθε υλικό που εισέρχεται μέσα στον ορίζοντα γεγονότων, καταπίνεται από τη σημειακή ιδιομορφία.
2. Δεν υπάρχει τρόπος διαφυγής του υλικού μιας μαύρης τρύπας προς άλλες περιοχές του δικού μας ή ενός άλλου παράλληλου Σύμπαντος.
3. Κάθε αντικείμενο που περνάει από τη σημειακή ιδιομορφία επιμηκώνεται κατά τη διεύθυνση της κίνησής του και συρρικνώνεται σε πλάτος απεριόριστα, με αποτέλεσμα να καταστραφεί.

Οι προηγούμενες απαντήσεις βέβαια έχουν μόνο θεωρητική σημασία εφόσον οι αξιωματικά τεθείσες αρχικές προϋποθέσεις δεν περιγράφουν μια πραγματική αλλά μια θεωρητική και μαθηματικά ιδανική μελανή οπή. Όπως αποδείχθηκε στη συνέχεια, μια οπή σαν αυτή των Oppenheimer και Snyder είναι ασταθής, ακόμα και σε πολύ μικρές διαταραχές.

Τα παράδοξα αποτελέσματα μιας σημειακής ιδιομορφίας

Η σημειακή αυτή ανωμαλία ως αποτέλεσμα της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας αποτέλεσε —από τότε που βρέθηκε— τη μεγαλύτερη πρόκληση προς τη σύγχρονη Φυσική. Η σημειακή ιδιομορφία είναι μια περιοχή του χωροχρόνου όπου η φυσική θεωρία, δηλαδή όλο το σύστημα των φυσικών νόμων και γνώσεων, παύει να ισχύει. Εδώ επικρατούν απείρως μεγάλες βαρυτικές δυνάμεις που διαλύουν κάθε σώμα, το οποίο φτάνει εκεί, σε στοιχειώδη σωμάτια της ύλης.

Αλλά και πιο πέρα, τα πρωτόνια, τα νετρόνια, τα φωτόνια και άλλα στοιχειώδη σωμάτια συμπίεζονται σε άπειρη πυκνότητα και ουσιαστικά παύουν να υπάρχουν. Δηλαδή παύουν να υπάρχουν τόσο η μάζα όσο και η ενέργεια του αστεριού. Πού πηγαίνουν όμως;

Η απάντηση είναι τόσο περίεργη που, αν δεν τη βλέπαμε να ξεπροβάλλει μέσα από τη Θεωρία της Σχετικότητας, θα πιστεύαμε ότι αποτελεί κεφάλαιο βιβλίου επιστημονικής φαντασίας.

Η μάζα, σύμφωνα με κάποιες θεωρητικές απόψεις (μελανή οπή Schwarshild), μέσω μιας τετραδιάστατης γέφυρας, της *γέφυρας Einstein-Rosen* (σκουληκότρυπας)*, ταξιδεύει και καταλήγει σ' ένα καινούργιο αλλά ξεχωριστό Σύμπαν που συνυπάρχει με το δικό μας, χωρίς όμως να γίνεται αντιληπτό από εμάς. Το ταξίδι βέβαια της αστρικής μάζας μέσω της γέφυρας *Einstein-Rosen* δεν είναι τόσο απλό, εφόσον θα πρέπει να γίνει με την ταχύτητα του φωτός, γεγονός το οποίο αποκλείει η Θεωρία της Σχετικότητας**, τουλάχιστον όσον αφορά το αισθητό στον άνθρωπο Σύμπαν.

* Οι αστροφυσικοί έδωσαν στη γέφυρα Einstein-Rosen το όνομα «σκουληκότρυπα» λόγω της ιστορίας που χρησιμοποιούσαν οι Άραβες μυστικιστές προκειμένου να περιγράψουν το μυστήριο του χρόνου. Οι Άραβες ανέφεραν: «Το σκουλήκι, τρυπώντας και τρώγοντας το μήλο, παχαίνει μέχρι να βγει από την άλλη πλευρά, κι έτσι δεν χωράει να ξαναγυρίσει από τον ίδιο δρόμο προς τα πίσω μέσα στη σκουληκότρυπα...».

** Αυτό συμβαίνει βέβαια στην περίπτωση που η ύλη διατηρεί τις φυσικές ιδιότητές της, έτσι όπως αυτές περιγράφονται από το σύστημα των γνωστών φυσικών νόμων. Κάτι τέτοιο όμως γνωρίζουμε ότι δεν ισχύει.

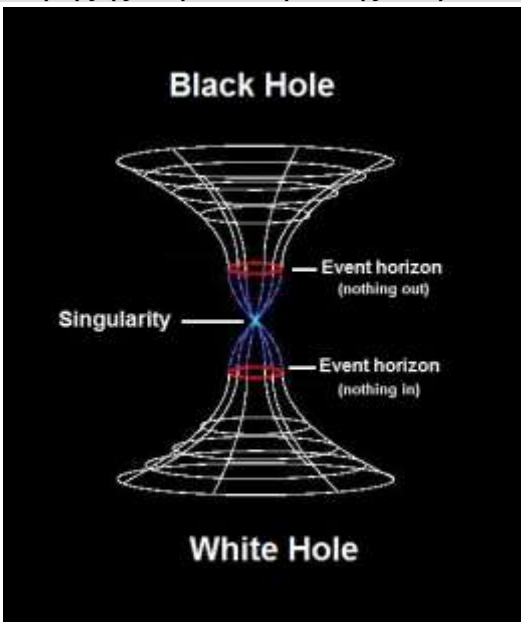
Στο πλαίσιο αυτού του νέου Σύμπαντος, σύμφωνα με πολλούς μελετητές, ο χρόνος και ο χώρος, όπως τους αντιλαμβάνεται η ανθρώπινη λογική και εμπειρία, παύουν να υπάρχουν. Από τον νέο αυτό χώρο ένας φανταστικός ταξιδιώτης μπορεί να μεταπηδήσει, θεωρητικά, άπειρες φορές στο παρελθόν ή στο μέλλον, χωρίς να διανύσει καμιά χρονική ή χωρική απόσταση*.

* Με αυτό τον τρόπο νεότεροι ερευνητές και ευφάνταστοι μελετητές του κόσμου των άστρων πιστεύουν πως θα δοθεί η λύση στο αίνιγμα των διαστρικών ταξιδιών. Έτσι ο διάσημος Αμερικανός αστροφυσικός Kip Thorne ομιλεί για επικοινωνία απομακρυσμένων σημείων στο Σύμπαν μέσω της «σκουληκότρυπας» και για αντιστροφή της ροής του χρόνου (time machines).

Από το παράλληλο αυτό Σύμπαν η μάζα του αστεριού μπορεί, σύμφωνα με τις ίδιες θεωρητικές απόψεις, να μεταφερθεί και πάλι στο δικό μας Σύμπαν, μέσω μιας αντιδιαμετρικής σημειακής ανωμαλίας του νέου Σύμπαντος —την οποία ονομάσαμε *λευκή οπή*— και να εμφανιστεί σε χώρο και χρόνο άσχετο με αυτόν της εξαφάνισής της.

Η λευκή οπή

Μια *λευκή οπή* θα αποτελούσε πρακτικά μια περιοχή του χώρου από την οποία θα υλοποιούνταν μέσα στο παρατηρούμενο Σύμπαν μας μάζα απείρου πυκνότητας (προερχόμενη από το αισθητό τίποτα) μέσω μιας εκτυφλωτικής έκρηξης απροσδιόριστης διάρκειας.



Το φαινόμενο αυτό θα παρουσιαζόταν, σε μικρογραφία ίσως, σαν ένα φαινόμενο αντίστοιχο της *Μεγάλης Έκρηξης* από την οποία —όπως πιστεύεται σήμερα— γεννήθηκε το Σύμπαν μας. Μια τέτοια αποδοχή, βέβαια, θα κατέρριπτε τις σύγχρονες κοσμολογικές απόψεις, αλλά και μια σειρά κοινωνικών και φιλοσοφικών ρευμάτων που στηρίχτηκαν σ' αυτές, αφού θα αχνόφεγγε η υπόθεση της γέννησης του αισθητού σ' εμάς Σύμπαντος μέσα από την ψευδή ανυπαρξία ενός άλλου αόρατου Σύμπαντος, που ίσως απλώνεται πίσω από τον ορίζοντα μιας μαύρης τρύπας!

Σύμφωνα με αυτή την άποψη, ολόκληρο το Σύμπαν μας, εφ' όσον διαστέλλεται, δεν αποτελεί παρά το χώρο εξέλιξης μιας τεράστιας λευκής οπής χωρίς όρια.

Ίσως λόγω αυτών των γεγονότων, οι φυσικοί έχουν σήμερα την εντύπωση ότι η ύπαρξη λευκών οπών θα διατάρασσε την αποδεκτή, επιστημονικώς, τάξη

πραγμάτων, οδηγώντας σε αποτελέσματα που δεν θα ήταν δυνατόν να υποστηριχθούν από τη σύγχρονη επιστημονική θεωρία.

Όπως μπορούμε πλέον να αποδείξουμε θεωρητικά, κατά τις πρώτες στιγμές της εμφάνισης μιας λευκής οπής και μέχρι η εκχεόμενη ύλη να ξεπεράσει την αντίστοιχη ακτίνα Schwarzschild, οι παρατηρούμενες φασματικές γραμμές της θα παρουσιάζονται μετατοπισμένες προς την ιώδη περιοχή του φάσματος (μικρά μήκη κύματος). Από το σημείο αυτό κι έπειτα η μετατόπιση προς το κυανό δίνει τη θέση της σε μια μετατόπιση προς το ερυθρό (μεγάλα μήκη κύματος).

Η παλινδρόμηση της θέσης των φασματικών γραμμών της λευκής οπής μεταξύ ιώδους και ερυθρής περιοχής —όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε— δεν οφείλεται καθ' ολοκληρία, στο φαινόμενο Doppler, αλλά είναι μια σύνθεση φαινομένου Doppler και μετατόπισης των φασματικών γραμμών, λόγω της παρουσίας βαρυτικών πεδίων υψηλής έντασης.

Τι είναι όμως τελικά οι λευκές οπές, εκτός από πόρτες εισόδου απροσδόκητης ύλης και ενέργειας στο αισθητό Σύμπαν;

Στην ερώτηση αυτή προσπάθησαν να δώσουν απάντηση ο Ισραηλινός πυρηνικός φυσικός Yuval Neeman, καθώς και ο Ρώσος μαθηματικός Sergei Petrovich Novikov, οι οποίοι με ανεξάρτητες εργασίες τους ισχυρίστηκαν ότι οι λευκές οπές αποτελούν καθυστερημένα γεγονότα σε σχέση με τη στιγμή της δημιουργίας του Σύμπαντος —που γεννήθηκε πριν από αρκετά δισεκατομμύρια χρόνια— μέσω των οποίων, όπως και τότε, γεννάται εκ του μη αισθητού ύλη και ενέργεια.

Επανερχόμενοι όμως στη μελέτη των μελανών οπών, δεν μπορούμε παρά να σημειώσουμε ότι αυτό που δεν ευχαριστεί τους φυσικούς που ασχολούνται με τη θεωρία των μελανών οπών είναι ότι χάνεται, όπως πιστεύουν, η έννοια της τάξης στο Σύμπαν και το τυχαίο αποβαίνει κυρίαρχος παράγοντας στην κατανόηση των φυσικών μηχανισμών. Τα πράγματα γίνονται ακόμα σοβαρότερα όταν θεωρήσουμε ότι όλα τα παράξενα γεγονότα που συνδέονται με μια μαύρη τρύπα είναι ουσιαστικά μια έκφραση της σημειακής ανωμαλίας που υπάρχει πίσω από τον ορίζοντα της μαύρης τρύπας. Εδώ είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι οι σημειακές ανωμαλίες δεν προκύπτουν απλώς από εσωτερικές ατέλειες της Θεωρίας της Σχετικότητας, αλλά αποτελούν, αναπόφευκτα, μέρος κάθε άλλης ολοκληρωμένης βαρυτικής θεωρίας. Σημειώνουμε ότι ιστορικά η έννοια της μαύρης τρύπας εισήχθη για πρώτη φορά από τον John Michell του Cambridge το 1783, ενώ και ο μαθηματικός, φυσικός και αστρονόμος Pierre Laplace (1749-1827), το 1796—με την κλασική θεωρία— το προέβλεψε την ύπαρξή της.

Ένα άλλο επίσης ενδιαφέρον θέμα είναι ότι τα σημεία αυτά, στα οποία καταρρίπτεται η έννοια του χωροχρόνου και ολόκληρης της φυσικής θεωρίας, υπάρχουν ανεξάρτητα της ύπαρξης ενός άστρου που καταρρέει προς το κέντρο του.

Ένας από τους πιο γνωστούς ερευνητές των παράδοξων φαινομένων που δημιουργεί η ύπαρξη μελανών οπών είναι και ο Στήβεν Χώκινγκ (Stefen Hawking), διάσημος κοσμολόγος και καθηγητής των μαθηματικών στο Cambridge. Η πρώτη σπουδαία θεωρητική ανακάλυψη του Χώκινγκ ήρθε το 1971, όταν απέδειξε ότι κατά τα πρώτα στάδια της δημιουργίας του Σύμπαντος ήταν δυνατός ο σχηματισμός μικροσκοπικών μελανών οπών, όχι μεγαλύτερων από έναν ατομικό πυρήνα, που αγκάλιαζαν όμως μάζα μεγαλύτερη από εκείνη ενός βουνού ύλης (βλέπε σελίδα...).

Τα κυριότερα είδη μελανών οπών

Μια μελανή οπή, όπως πιστεύουμε σήμερα, χαρακτηρίζεται από τρεις ιδιότητες: τη μάζα, την ιδιοστροφορμή (spin) και το ηλεκτρικό της φορτίο. Ανάλογα με το ποιες από αυτές τις τρεις ιδιότητες θεωρούμε ότι ισχύουν, η σύγχρονη Αστροφυσική προτείνει τα θεωρητικά μοντέλα τεσσάρων τύπων μελανών οπών.

1. Η μελανή οπή Schwarzschild

Το 1916 ο Γερμανός φυσικός και αστρονόμος Karl Schwarzschild (1873-1916), χρησιμοποιώντας τη Θεωρία της Σχετικότητας, μπόρεσε να περιγράψει θεωρητικά μια μελανή οπή με σφαιρική συμμετρία, που δεν παρουσίαζε ιδιοστροφορμή (spin), δηλαδή δεν περιστρεφόταν και δεν είχε ηλεκτρικό φορτίο, παρά μόνο μάζα. Η ύπαρξη μιας τέτοιας μελανής οπής έχει τη δυνατότητα να παραμορφώνει το χώρο και, μέσω μιας τετραδιάστατης σήραγγας –μιας σκουληκότρυπας (γέφυρα Einstein- Rossen)–, να μεταφέρει και να εμφανίζει, μέσω μιας λευκής οπής, την εξαφανιζόμενη στο πλαίσιο της μελανής οπής μάζα, σε άλλα σημεία του συμπαντικού χώρου και χρόνου.

Ας δούμε, όμως, πώς αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής, ο οποίος βρίσκεται σε πολύ μεγάλη απόσταση από τη μαύρη τρύπα, μια ακτινοβολούσα μάζα που κατευθύνεται προς αυτήν.

Καθώς η μάζα βυθίζεται στο βαρυτικό πεδίο της μελανής οπής, οι φασματικές της γραμμές θα μετατοπίζονται όλο και περισσότερο προς την ερυθρή περιοχή του φάσματος, δηλαδή προς τα μεγάλα μήκη κύματος (βλέπε σελίδα...).

Τελικά, όταν η μάζα πλησιάσει πολύ κοντά στη μελανή οπή, οι φασματικές της γραμμές θα μετατοπιστούν σε μήκη κύματος τόσο μεγάλα, που πρακτικά δεν θα μπορούν να ανιχνευτούν. Η μάζα τότε θα έχει πρακτικά εξαφανιστεί τόσο από τις αισθήσεις, όσο και από τα μέσα παρατήρησης του παρατηρητή.

Ενώ όμως αυτά θα αντιλαμβάνεται ο μακρινός παρατηρητής, κάποιος άλλος που θα βρίσκεται πάνω στην κινούμενη μάζα θα αισθάνεται τη Βαρύτητα να μεγαλώνει συνεχώς μέχρις ότου οι τεράστιες παλιρροϊκές δυνάμεις κοντά στη σημειακή ιδιομορφία θα τον διαλύσουν σε κομμάτια, και τα κομμάτια αυτά θα διαχωρίζονται επ' άπειρον σε μικρότερα μέχρις ότου η μάζα του θα πάψει να υπάρχει.

2. Η μελανή οπή Kerr

Ένας δεύτερος τύπος μελανής οπής δομήθηκε θεωρητικά το 1963 από τον Νεοζηλανδό μαθηματικό Roy Kerr. Η αρχική ιδέα του βασιζόταν στο γεγονός ότι το μαζικό αστέρι —του οποίου η κατάρρευση δημιουργεί την οπή— περιστρέφεται, άρα θα έπρεπε και η σχηματιζόμενη μελανή οπή να το ακολουθεί σ' αυτήν του την περιστροφή. Με τον τρόπο αυτό δημιουργείται το μοντέλο μιας μελανής οπής που έχει μάζα και ιδιοστροφομή.

Μια μελανή οπή αυτού του τύπου, εκτός από τον σφαιρικό ορίζοντα Schwarzschild που την περιβάλλει, καλύπτεται και έξω απ' αυτόν από μια ελλειψοειδή επιφάνεια (ορίζοντα) που εφάπτεται του προηγούμενου ορίζοντα στους πόλους και ονομάζεται *στατικό όριο*.

Ο χώρος ο οποίος απλώνεται μεταξύ των δύο οριζόντων ονομάζεται *εργόσφαιρα* και κάθε σώμα που βρίσκεται μέσα της αναγκάζεται να περιστρέφεται γύρω από τη μελανή οπή.

Το ενδιαφέρον όμως φαινόμενο είναι ότι, αν μια μάζα περάσει μέσα στην εργόσφαιρα, υπάρχει η δυνατότητα να διασπαστεί και το ένα από τα κομμάτια της να πέσει μέσα στη μελανή οπή, ενώ το άλλο να ξαναβγεί έξω απ' αυτήν μεταφέροντας ενέργεια πολύ μεγαλύτερη από την ενέργεια της μάζας του αρχικού σώματος ($E=mc^2$). Ο μηχανισμός βάσει του οποίου παράγεται αυτή η ενέργεια ονομάζεται *μηχανισμός Penrose*, από τον διάσημο Άγγλο κοσμολόγο Roger Penrose που τον περιέγραψε.

Το εν λόγω φαινόμενο κέντρισε τη φαντασία πολλών ερευνητών που διατύπωσαν μια πολύ προωθημένη άποψη παραγωγής ενέργειας από μια μελανή οπή Kerr. Σύμφωνα με αυτή την εκδοχή μια μελλοντική διαστημική αποικία θα μπορούσε να συναρμολογηθεί στα όρια του στατικού ορίου και τα απόβλητά της —που θα ρίχνονταν μέσα στη μελανή οπή— θα παρήγαγαν πολλαπλάσια ενέργεια από το ισοδύναμο της μάζας τους. Η ενέργεια αυτή θα συλλεγόταν και θα συντηρούσε την αποικία για εκατομμύρια χρόνια.

3. Η μελανή οπή Reissner-Nordstrom

Οι μελανές οπές αυτού του τύπου προκύπτουν θεωρητικά από την κατάρρευση απολύτως σφαιρικών αστεριών πολύ μεγάλης μάζας και

παρουσιάζονται ηλεκτρικά φορτισμένες, αλλά η ιδιοστροφορμή τους είναι μηδενική.

Τα αντικείμενα τα οποία περνούν τη σημειακή ιδιομορφία μιας τέτοιας μελανής οπής, μέσω ενός ενδιάμεσου «μικρού και κλειστού Σύμπαντος» οδηγούνται σε κάποιο άλλο παράλληλο προς το δικό μας Σύμπαν. Και αυτή όμως η λύση είναι εντελώς θεωρητική και δεν αντιστοιχεί σε μια πραγματική μελανή οπή.

4. Η μελανή οπή Kerr-Newman

Χαρακτηριστικό γνώρισμα αυτών των μελανών οπών, που αποτελούν γενίκευση της μελανής οπής Kerr, είναι η ταυτόχρονη παρουσία ιδιοστροφορμής και ηλεκτρικού φορτίου. Σημειώνουμε ότι όταν για παράδειγμα η ιδιοστροφορμή και το ηλεκτρικό φορτίο μηδενίζονται, καταλήγουμε στη μελανή οπή Schwarzschild. Τότε ο *ορίζοντας* και το *στατικό όριο* ταυτίζονται.

Η σημειακή ιδιομορφία στην κβαντική Φυσική

Σύμφωνα με τις κβαντικές απόψεις πολύ κοντά στη σημειακή ιδιομορφία, όταν δηλαδή η χωροχρονική καμπύλωση γίνει άπειρη, παύει να ισχύει ο κλασικός φυσικός νόμος και επικρατούν νέοι νόμοι περιγραφόμενοι από την κβαντική βαρύτητα.

Η κβαντική βαρύτητα διασπά τη διάκριση χώρου και χρόνου καταστρέφοντας τις επικρατούσες έννοιες τόσο του χώρου όσο και του χρόνου. Με τον τρόπο αυτό δεν έχουν έννοια οι όροι: «παρόν», «παρελθόν», «μέλλον», «μετά», «πριν», «εδώ», «εκεί», «μακριά», «κοντά».

Υπ' αυτή τη νέα αντίληψη ό,τι άλλοτε αποτελούσε το «χώρο» μετατρέπεται σε έναν τυχαίο πιθανοκρατικό κβαντικό αφρό*, ο οποίος είναι και το κυρίαρχο συστατικό της χωροχρονικής ανωμαλίας μιας μελανής οπής. Από μια τέτοια κβαντική κατάσταση υπάρχει η δυνατότητα, μέσα από τη σημειακή ιδιομορφία να δημιουργηθούν «νέα Σύμπαντα», με τον ίδιο τρόπο που γεννήθηκε κάποτε το δικό μας «Σύμπαν»

* Ο όρος κβαντικός αφρός δόθηκε για πρώτη φορά από τον J.A. Wheeler.

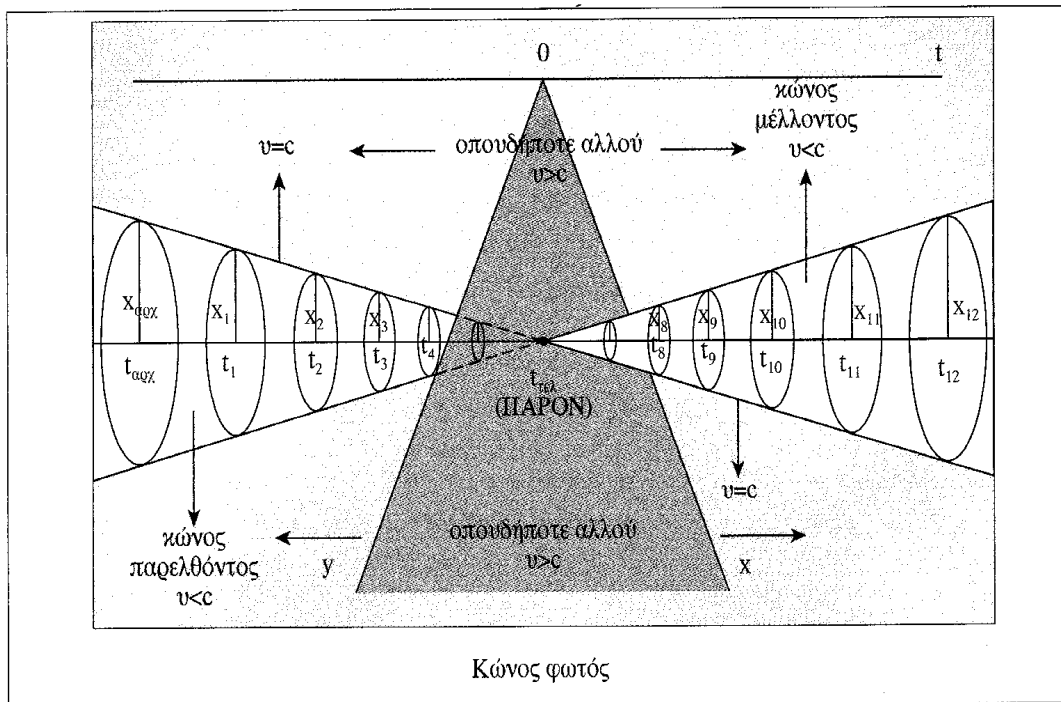
Κώνος φωτός

Αν θεωρήσουμε ένα ενεργειακό σημείο του ψευδο-Ευκλείδειου χώρου Minkowski, στο πλαίσιο της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας, με συντεταγμένες x, y, z , αυτό θα εκπέμπει κάθε χρονική στιγμή t ένα σφαιρικό κύμα ενέργειας. Με τον τρόπο αυτό μετά την πάροδο ενός χρονικού

διαστήματος $\Delta t = t_{\text{τελ}} - t_{\text{αρχ}}$, γύρω από το ενεργειακό σημείο θα υπάρχουν επάλληλα σφαιρικά στρώματα ενέργειας.

Στο χρόνο $t_{\text{αρχ}}$, θα αντιστοιχεί το σφαιρικό ενεργειακό κέλυφος με τη μεγαλύτερη ακτίνα (ή μεγαλύτερος μέγιστος κύκλος) και στο $t_{\text{τελ}}$, το κέλυφος με τη μικρότερη (σημειακή) ακτίνα (ή μηδενικός μέγιστος κύκλος).

Η ύπαρξη του ενεργειακού σημείου (το οποίο θα ονομάζουμε στη συνέχεια γεγονός), γίνεται αντιληπτή από κάθε σημείο του χώρου στο οποίο έχει τη δυνατότητα να φτάσει το ενεργειακό κύμα. Αυτό σημαίνει ότι οι νόμοι της Φυσικής που περιγράφουν το γεγονός ισχύουν μόνο για όλα τα σημεία στα οποία αυτό εξελίσσεται.



Ας προσπαθήσουμε τώρα να περιγράψουμε το προηγούμενο φαινόμενο σ' έναν τρισδιάστατο χώρο που περιέχει ως διαστάσεις του το μήκος x , το πλάτος y και το χρόνο t . Θέλουμε δηλαδή στην ουσία να παραστήσουμε τη μεταβολή του μέγιστου κύκλου της ενεργειακής σφαίρας (προβολή της ενεργειακής σφαίρας στο επίπεδο xy) συναρτήσεως του χρόνου.

Για να περιγράψουμε το τρισδιάστατο αυτό φαινόμενο, σχηματίζουμε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων τεμνόμενων στο σημείο $t=0$ (παρόν του γεγονότος).

Με τον τρόπο αυτό, κάθε παρελθών χρόνος είναι τυπικά αρνητικός, ενώ κάθε μελλοντικός θετικός.

Αν μεταφέρουμε όλες τις προηγούμενες παρατηρήσεις στο τρισσορθόγωνιο σύστημα που έχουμε δημιουργήσει, το $t_{\text{τελ}}=0$ και αντιστοιχεί στο παρόν, ενώ το $t_{\text{αρχ}}$ αποτελεί το πλέον απομακρυσμένο (αρνητικό) σημείο του παρελθόντος.

Σε κάθε χρονικό σημείο από το $t_{\text{αρχ}}$ προς το $t_{\text{τελ}}$ αντιστοιχεί και ένας φθίνων μέγιστος κύκλος. Έτσι το απειροσύνολο αυτών των φθινόντων μεγίστων κύκλων, δηλαδή κύκλων με συνεχώς ελαττούμενη διάμετρο, δημιουργεί έναν κώνο μέσα στον οποίο εξελίσσεται το σύνολο των γεγονότων του παρελθόντος.



Ο χώρος του κώνου του παρελθόντος είναι το παρατηρούμενο σύμπαντος. Υπάρχουν περιοχές του σύμπαντος με $V>c$ αλλά βρίσκονται εκτός των δυνατοτήτων των αισθήσεών μας.

Με βάση την ίδια λογική μπορούμε να δημιουργήσουμε έναν κώνο μελλοντικών γεγονότων συμμετρικό ως προς τον κώνο του παρελθόντος, προς τη διεύθυνση του θετικού άξονα των χρόνων (μέλλοντος).

Ακόμα, ενδιαφέρον είναι να παρατηρήσουμε ότι στο προηγούμενο διάγραμμα, τα γεγονότα και οι φυσικοί νόμοι που τα περιγράφουν, εξελίσσονται αποκλειστικά στο πλαίσιο των δημιουργούμενων κώνων γεγονότων που ονομάζονται κώνοι φωτός.

Το σύνολο των σημείων, εκτός αυτών των κώνων, αποτελεί ένα σύνολο σημείων στα οποία δεν είναι δυνατόν να εξελιχθεί κανένα γεγονός, άρα βρίσκεται εκτός των δυνατοτήτων των αισθήσεών μας. Το σύνολο των εκτός κώνων σημείων το ονομάζουμε συνολικά *οπουδήποτε αλλού*.

Πάνω στην επιφάνεια των κώνων φωτός οι ταχύτητες είναι ίσες με την ταχύτητα του φωτός, στο εσωτερικό τους μικρότερες, ενώ στις περιοχές εκτός των κώνων φωτός επικρατούν ταχύτητες μεγαλύτερες του φωτός, δηλαδή

ταχύτητες που είναι αδύνατο να πραγματοποιηθούν εντός των ορίων του Σύμπαντός μας.

Σύμφωνα με τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, δεν θα πρέπει να διαφεύγει της προσοχής μας ότι οι κώνοι φωτός είναι Ρειμάνιοι τεσσάρων και όχι τριών διαστάσεων. Αυτό σημαίνει ότι είναι μη αισθητοί. Συγχρόνως οι κώνοι φωτός παραμορφώνονται, όπως προβλέπει η βαρυτική θεωρία, από την παρουσία και την κατανομή της υπάρχουσας ύλης.

Ειδικότερα στο πλαίσιο του χώρου του αισθητού Σύμπαντος η ύπαρξη ή η δημιουργία *σημειακών ιδιομορφιών** δίνει τη δυνατότητα δημιουργίας *λώρων Αϊνστάιν-Ρόζεν (σκουληκότρυπες)***. Οι λώροι αυτοί ενώνουν μεταξύ τους — άχρονα και διαμέσου περιοχών εκτός κώνων φωτός — περιοχές του μέλλοντος ή του παρελθόντος. Ομοίως με τον αυτό τρόπο είναι θεωρητικά δυνατή η ζεύξη περιοχών του μέλλοντος και του παρελθόντος***.

* Εφόσον το υλικό που βρίσκεται επί της σημειακής ιδιομορφίας κινείται με την ταχύτητα του φωτός, η θέση του ιδιόμορφου σημείου θα κείται επί της εξωτερικής επιφάνειας του κώνου φωτός.

** Όπως αναφέρουν ο Jack Sarfatti και ο Bob Toben στο βιβλίο τους *Space-Time and Beyond* (1975): «Μέσα από τις σταθερά εμφανιζόμενες και εξαφανιζόμενες συνδέσεις των σκουληκότρυπων, κινούνται σήματα που προκαλούν στιγμιαία επικοινωνία ανάμεσα σε όλα τα τμήματα του συμπαντικού χώρου. Αυτά τα σήματα μπορούν να παρομοιαστούν με τους παλμούς των νευρικών κυττάρων ενός μεγάλου κοσμικού εγκεφάλου που διαχέεται σε όλα τα τμήματα του χώρου. Πρόκειται για μια άποψη που δημιουργήθηκε από τη Γενική Σχετικότητα του Αϊνστάιν με τη μορφή της Γεωμετροδυναμικής. Μια παράλληλη άποψη εμφανίζεται στην κβαντική θεωρία, έτσι όπως ερμηνεύεται από τον Ντέιβιντ Μπομ. Κατά την άποψή μου, αυτό δεν είναι τυχαίο, διότι υποπεύομαι ότι η Γενική Σχετικότητα και η κβαντική θεωρία είναι δύο συμπληρωματικές όψεις κάποιας βαθύτερης θεωρίας που περιλαμβάνει σαν ιδέα-κλειδί ένα είδος κοσμικής συνείδησης».

*** Μην ξεχνάμε ότι η κίνηση του υλικού στο πλαίσιο των λώρων Αϊνστάιν-Ρόζεν, γίνεται με ταχύτητες ίσες με την ταχύτητα του φωτός. Αυτό σημαίνει ότι ο λώρος αυτός απλώς είναι η παραμόρφωση και προέκταση μέσα στο χώρο του «οπουδήποτε αλλού» της εξωτερικής επιφάνειας του κώνου φωτός.

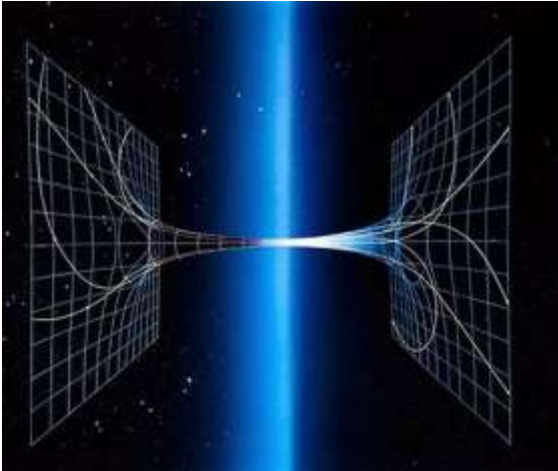
Η απαγορευτική αρχή του Penrose

Το 1969 ο R. Penrose διατύπωσε την επόμενη αναπόδεικτη αρχή η οποία όμως αποτελούσε μια σταθερή και ισχυρή του άποψη: «Δεν είναι δυνατόν να σχηματιστεί μια σημειακή ιδιομορφία χωρίς αυτή να καλύπτεται από ορίζοντα γεγονότων».

Η αναπόδεικτη αυτή άποψη απέρριπτε ουσιαστικά (απαγόρευε αξιωματικά δηλαδή) τη δυνατότητα παρατήρησης λευκών οπών, αφού αυτές θα έπρεπε να καλύπτονται από ορίζοντες γεγονότων οι οποίοι θα τις καθιστούσαν αόρατες.

Η παραπάνω άποψη αποτελεί ακόμα μια ισχυρή θέση του επιστημονικού «δογματισμού». Παρ' όλα αυτά ο S. Hawking, υπέρμαχος της απαγορευτικής αρχής του Penrose, ανακάλυψε κάποιες μαθηματικές ενδείξεις, οι οποίες οδηγούν στο συμπέρασμα ότι μια μαύρη τρύπα, όταν ολοκληρωθεί η εξάτμισή της, πιθανότατα δεν εξαφανίζεται ολοκληρωτικά, αλλά αφήνει πίσω της μια γυμνή σημειακή ιδιομορφία.

Γέφυρες Einstein-Rosen (σκουληκότρυπες)



Όπως είδαμε στα προηγούμενα, κάποιες λύσεις των εξισώσεων πεδίου του Αϊνστάιν οδηγούν στο συμπέρασμα ότι είναι δυνατή η δημιουργία γεφυρών Einstein-Rosen (σκουληκότρυπων), οι οποίες θεωρητικά τουλάχιστον έχουν τη δυνατότητα να ενώνουν άχρονα διαφορετικά σημεία του Σύμπαντος και διαφορετικές χρονικές στιγμές του.

Οι σκουληκότρυπες ανακαλύφθηκαν μαθηματικά, για πρώτη φορά, από τον Ludwing Flamm το 1916 σαν λύσεις των εξισώσεων πεδίου της Σχετικότητας, λίγους μόνο μήνες μετά τη διατύπωσή τους. Με το θέμα αυτό ασχολήθηκαν πολύ αργότερα, το 1930, ο A. Einstein ο N. Rosen και ο J. A. Wheeler, το 1950.

Το μεγάλο όμως πρόβλημα, όσον αφορά τις περιέργες αυτές χωροχρονικές κοσμολογικές γέφυρες, είναι ο πολύ μικρός χρόνος ζωής τους. Ο χρόνος αυτός γίνεται πολύ μικρότερος στην περίπτωση που πέσουν τυχαία μέσα τους ελαχιστότατες ποσότητες ακτινοβολίας. Η ακτινοβολία αυτή, όπως υπολόγισε ο Doug Eardley, επιταχύνεται λόγω της μεγάλης βαρύτητας και αποκτά υψηλότερη ενέργεια η οποία αναγκάζει τη σκουληκότρυπα να μειώσει το χρόνο ζωής της τόσο, ώστε πρακτικά να θεωρούμε ότι σχεδόν «κλείνει» ακαριαία* μόλις γεννηθεί.

* Τι σημαίνει όμως ο όρος ακαριαία, όταν έχει καταργηθεί η έννοια του χρόνου και του χώρου ως ανεξάρτητων και αυτόνομων καταστάσεων (βλέπε σελίδα...);
Ας μην ξεχνάμε ότι, στα όρια της σημειακής ιδιομορφίας, η διάρκεια ενός μικρού κλάσματος του δευτερολέπτου είναι άπειρη

Πώς λοιπόν θα μπορούσαμε να διατηρήσουμε ανοικτή μια σκουληκότρυπα;
Όπως αναφέρει ο K. Thorne στο βιβλίο του *Μαύρες Τρύπες και στρεβλώσεις του χωροχρόνου* (Εκδόσεις Κάτοπτρο, Αθήνα 1999):

«...Πρώτον, ο μόνος τρόπος να κρατήσουμε τη σκουληκότρυπα ανοικτή είναι να διοχετεύσουμε μέσα της κάποιο είδος ύλης, το οποίο θα απωθεί βαρυτικά τα τοιχώματα της σκουληκότρυπας και θα τα κρατά μακριά το ένα από το άλλο. Τέτοιου είδους ύλη θα την αποκαλώ εξωτική επειδή, όπως θα δούμε, διαφέρει αρκετά από κάθε άλλη μορφή ύλης που έχει συναντήσει μέχρι σήμερα ο άνθρωπος.

Δεύτερον, ακριβώς όπως η εξωτική ύλη πρέπει να ωθεί προς τα έξω τα τοιχώματα της σκουληκότρυπας, έτσι η συγκεκριμένη ύλη θα ωθεί βαρυτικά τις φωτεινές ακτίνες μιας δέσμης που διέρχεται από μέσα της, απομακρύνοντας τη μια ακτίνα από την άλλη. Με άλλα λόγια, η εξωτική ύλη θα συμπεριφέρεται σαν αποκλίνων φακός και βαρυτικά αποκλίνουσα τη φωτεινή δέσμη.

Τρίτον, από την εξίσωση πεδίου του Αϊνστάιν έμαθα ότι, για να ισχύουν τα δύο προηγούμενα συμπεράσματα, η εξωτική ύλη που διαπερνά τη σκουληκότρυπα πρέπει να έχει αρνητική μέση ενεργειακή πυκνότητα στο σύστημα αναφοράς μιας φωτεινής δέσμης που διαδίδεται εντός της σκουληκότρυπας».

Σε παρόμοια συμπεράσματα είχαν καταλήξει και οι Don Page, Dennis Gannon και C. W. Lee, υποστηρίζοντας και αυτοί ότι για να κρατηθεί μια σκουληκότρυπα, οποιασδήποτε μορφής, ανοικτή, έπρεπε να της διοχετεύσουμε εξωτικό υλικό.

Υπάρχει όμως εξωτικό υλικό; Το βέβαιο είναι ότι, αν υπάρχει, τότε και οι περιοχές μέσα στις οποίες δημιουργείται θα έπρεπε να είναι ομοίως εξωτικές. Το 1974 ο S. Hawking κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι διακυμάνσεις του κενού κοντά στον ορίζοντα μιας μαύρης τρύπας είναι εξωτικές, δηλαδή έχουν αρνητική μέση ενεργειακή πυκνότητα.

Σε παρεμφερή αποτελέσματα κατέληξαν το 1980 ο Don Page και ο Philip Candelas, επιβεβαιώνοντας ότι ο ορίζοντας μιας μελανής οπής έχει τη δυνατότητα να παραμορφώνει τις διακυμάνσεις του κενού δίνοντάς τους μια μορφή εντελώς διαφορετική από αυτή που έχουμε συνηθίσει να έχουν σε πολύ κοντινές μας περιοχές. Κάτω από τις νέες αυτές συνθήκες, η μέση ενεργειακή τους πυκνότητα καθίσταται αρνητική, δίνοντάς τους τον ζητούμενο εξωτικό χαρακτήρα που αναζητούσαμε*.

* Εκτός όλων των προηγούμενων δεν θα πρέπει να ξεχνάμε ότι, κοντά στη χωροχρονική ανωμαλία του ιδιόμορφου σημείου, επικρατεί μια κατάσταση κβαντικού αφρού. Γενικότερα σε κάθε περιοχή ίση ή μικρότερη των $1,62 \times 10^{-33}$ cm (μήκος Planck-Wheeler) επικρατεί κατάσταση κβαντικού αφρού. Αυτό σημαίνει ότι ο κβαντικός αφρός υπάρχει παντού γύρω μας, μέσα σε κάθε μελανή οπή, μέσα σε κάθε σκουληκότρυπα, μέσα σε κάθε κύτταρο του ανθρώπινου εγκεφάλου.

Οι αρχέγονες μαύρες τρύπες

Στις αρχές της δεκαετίας του '70 ο Hawking πρότεινε έναν τρόπο δημιουργίας των μελανών οπών, διαφορετικό από τη βαρυτική κατάρρευση ενός άστρου λόγω της εξάντλησης των πυρηνικών αποθεμάτων του. Σύμφωνα με τον σπουδαίο κοσμολόγο, κατά τα πρώτα 10^{-20} sec μετά τη Μεγάλη Έκρηξη, εμφανίζεται τοπική κατάρρευση της ύλης σε περιοχές αυξημένης πυκνότητας, με άμεσο αποτέλεσμα τη δημιουργία πολυάριθμων μελανών οπών της τάξεως μεγέθους του πρωτονίου με μάζες που κυμαίνονται από 10^{-5} - 10^{15} gr.

Αυτές οι μελανές οπές ονομάστηκαν *αρχέγονες* (primordial), ενώ είναι ακόμα γνωστές ως *mini μελανές οπές* και διαφέρουν από τις άλλες, κυρίως σε δύο σημεία:

1. Η εμβέλεια του βαρυτικού τους πεδίου είναι μόλις λίγα μέτρα.
2. Η ένταση του βαρυτικού τους πεδίου αυξάνει απότομα κοντά στον ορίζοντα γεγονότων, σε αντίθεση με τη βαθμιαία αύξηση που παρουσιάζουν οι, από βαρυτική κατάρρευση προερχόμενες, μελανές οπές.

Όπως αναφέρει ο Hawking, κάποια πρωτόνια και αντιπρωτόνια που σχηματίζονται στην περιοχή αυτών των *mini μελανών οπών* είναι δυνατόν — υπό ορισμένες συνθήκες — να διαφύγουν από το πεδίο βαρύτητας της μελανής οπής. Αυτά στη συνέχεια εξαυλώνονται παράγοντας ενέργεια, που ουσιαστικά προέρχεται από τη συγκεκριμένη μελανή οπή. Συνεπώς, αν αυτή η διαδικασία φθοράς συνεχιστεί, η μελανή οπή, αφού υφίσταται μια διαρκή απώλεια ενέργειας, προοδευτικά εξαφανίζεται.

Συνεχίζοντας τη θεωρητική διερεύνηση του θέματος, ο Χώκινγκ, ανακάλυψε, το 1974, ότι οι μαύρες τρύπες μπορούν να εξατμιστούν ή να εκραγούν, διασκορπίζοντας τη μάζα τους στο διάστημα και δημιουργώντας γεγονότα παραπλήσια με εκείνα των λευκών οπών.

Η τελευταία θέση συντάραξε τα θεμέλια της Θεωρίας της Σχετικότητας, η οποία δέχεται ότι η μάζα που έχει εγκλωβιστεί στα όρια μιας μαύρης τρύπας μπορεί να ξεφύγει από το τεράστιο βαρυτικό πεδίο, μόνο αν κινηθεί με την ταχύτητα του φωτός, γεγονός όμως που η ίδια η θεωρία απορρίπτει.

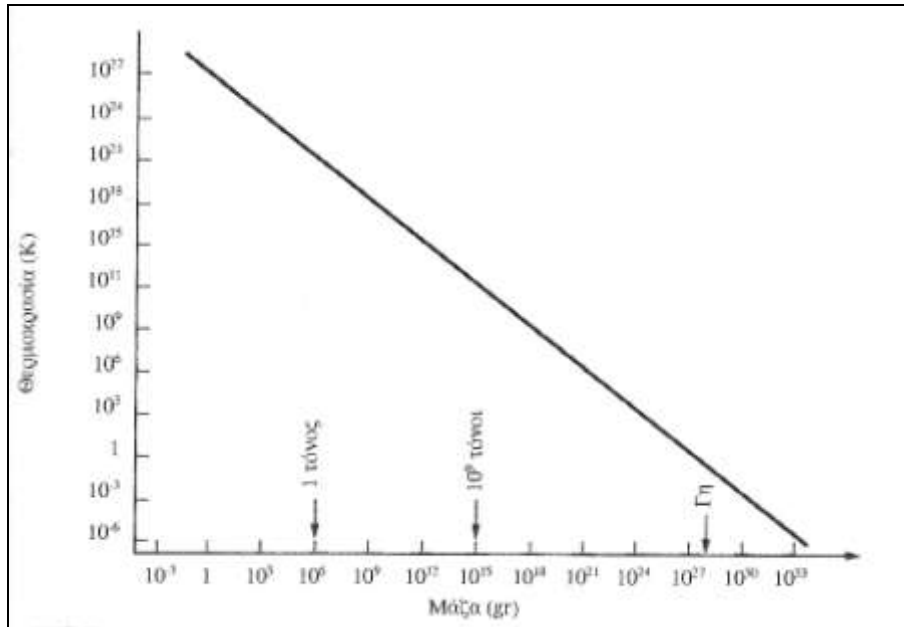
Το είδος αυτό των εξατμιζόμενων μελανών οπών του Χώκινγκ, επειδή εξωτερικεύουν προς το αισθητό Σύμπαν ενέργεια και ύλη, αναφέρεται από πολλούς σαν λευκές οπές, χωρίς βέβαια να έχουν καμιά σχέση με αυτές έτσι όπως τις ορίσαμε στα προηγούμενα.

Ο Bernard Carr απέδειξε θεωρητικά, το 1975, πως η ενέργεια η οποία απελευθερώνεται υπό μορφήν θερμότητας από μια εξατμιζόμενη μελανή οπή είναι αντιστρόφως ανάλογη της μάζας της και δίνεται από τη σχέση:

$$T = 6 \times 10^{-8} \text{ Mo} / M \text{ (σε βαθμούς Κέλβιν)}$$

όπου Mo είναι η μάζα του Ήλιου και M η μάζα της μελανής οπής.

Η σημαντικότερη παρατήρηση που προκύπτει από την παραπάνω σχέση είναι ότι οι μαζικές μελανές οπές είναι σχεδόν ψυχρές, ενώ το αντίθετο συμβαίνει για τις μελανές οπές πολύ μικρών μαζών.

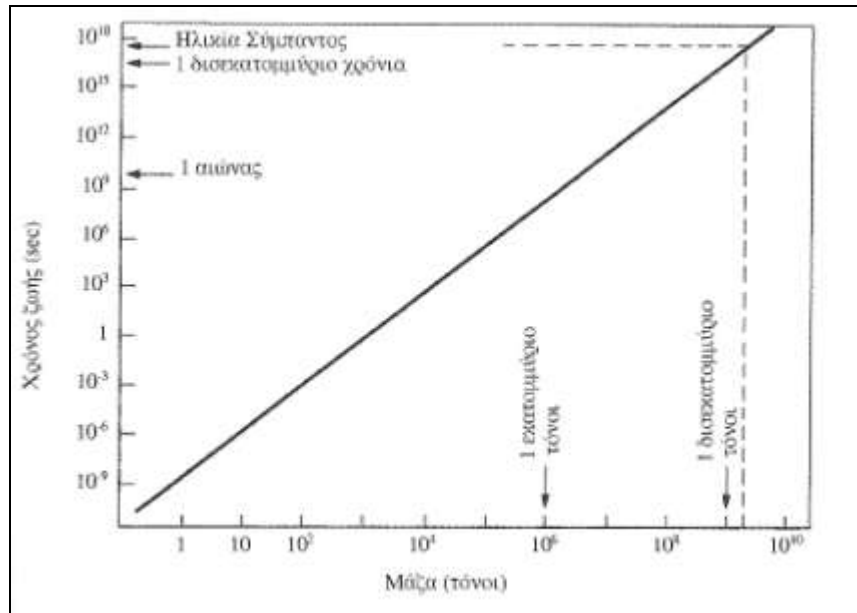


Διάγραμμα μάζας θερμοκρασίας μιας Μελανής Οπής

Εκτός της ενέργειας που εκλύεται από μια εξατμιζόμενη μελανή οπή, έχει υπολογιστεί και ο χρόνος ζωής της —μέχρι την πλήρη εξαφάνισή της— ο οποίος δίνεται από τη σχέση:

$$t = 10^{\frac{76}{3}} (M/M_{\odot})^3 \text{ sec}$$

Από την προηγούμενη σχέση γίνεται φανερό ότι, αν δεχτούμε πως η ηλικία του Σύμπαντος προσεγγίζει τα 18 δισεκατομμύρια χρόνια και πως κατά την περίοδο εκείνη δημιουργήθηκαν τέτοιου είδους μελανές οπές, τότε μέχρι σήμερα θα έχουν επιζήσει μόνο εκείνες που η μάζα τους ήταν μεγαλύτερη από λίγα δισεκατομμύρια τόνους. Εξάλλου έχουμε ισχυρές ενδείξεις ότι αρχέγονες εξατμιζόμενες μελανές οπές υπάρχουν άφθονες ακόμα και σήμερα. Ειδικότερα ο B. Carr διατύπωσε την άποψη ότι είναι πολύ πιθανόν τέτοιου είδους μελανές οπές να βρίσκονται κοντά ή ακόμα και μέσα στο πλανητικό μας σύστημα!



Διάγραμμα μάζα-χρόνος ζωής μιας Μελανής Οπής

Παράδοξα φαινόμενα στο περιβάλλον μιας Μελανής Οπής

Στο πλαίσιο μιας μαύρης τρύπας και μέσα στον αόρατο χώρο που ορίζεται από τον ορίζοντα γεγονότων της, σύμφωνα με τη Θεωρία της Σχετικότητας, συμβαίνουν υπέρλογα και ακατανόητα φυσικά γεγονότα. Αυτά οφείλονται αφενός μεν στις σχετικιστικές ταχύτητες με τις οποίες κινούνται οι μάζες οδηγούμενες προς τη σημειακή ανωμαλία, αφετέρου δε στις τεράστιες βαρυτικές δυνάμεις που αναπτύσσονται σ' αυτόν το χώρο.

Έτσι, σύμφωνα με τη Θεωρία της Σχετικότητας, το μήκος ενός αντικειμένου, που κινείται κατά τη διεύθυνση του μήκους του, μικραίνει όσο μεγαλώνει η ταχύτητά του και θα γίνει πρακτικά μηδέν, όταν η ταχύτητά του φτάσει την ταχύτητα του φωτός. Κατά τη διάρκεια όμως της χρονικής περιόδου που το μήκος τού αντικειμένου «ζαρώνει», λόγω της αύξησης της ταχύτητάς του, η μάζα του όλο και μεγαλώνει μέχρι να γίνει άπειρη, όταν το μήκος του θα έχει γίνει μηδέν. Ομοίως και ο χρόνος, όπως και η μάζα του σώματος, διαστέλλεται με την αύξηση της ταχύτητάς του. Άρα, τη στιγμή που το σώμα θα αποκτήσει την ταχύτητα του φωτός, ο χρόνος «παγώνει», γεγονός που σημαίνει ότι ο χρόνος ανάμεσα σε δύο κτύπους ενός ρολογιού υπολογίζεται πως θα είναι άπειρος, ταυτιζόμενος με την αιωνιότητα.

Όταν η μάζα φουσκώνει

Όταν μιλάμε για αύξηση της μάζας ενός σώματος καθώς αυξάνεται η ταχύτητά του σε σχετικιστικά επίπεδα, πολλοί κάνουν το λάθος να πιστεύουν

ότι αυξάνεται ο όγκος της μορφής του, δηλαδή το περιεχόμενο της αισθητής σε μας εικόνας του.

Αυτό όμως δεν είναι αληθινό. Όπως όλοι γνωρίζουμε, η μάζα ενός σώματος δεν μπορεί να ταυτιστεί με τη μορφή και τον όγκο της ύλης του αντικειμένου, αλλά αποτελεί απλώς μια ιδιότητα που μετρά την αδράνειά του, το μέτρο δηλαδή της δυνατότητάς του να αντιστέκεται σε κάθε προσπάθεια μεταβολής της κινητικής του κατάστασης. Όταν λοιπόν μιλάμε για αύξηση της μάζας ενός σώματος, εννοούμε την αύξηση του μέτρου της αδράνειάς του.

Πώς όμως αυξάνεται η αδράνεια του αντικειμένου μέσω της αύξησης της ταχύτητάς του;

Όπως απέδειξε ο Ιταλός φυσικός W. Bertozzi, με το πείραμα της μεγίστης ταχύτητας, όταν προσφέρουμε ενέργεια σε ένα σώμα για να αυξήσει την ταχύτητά του και όσο η αναπτυσσόμενη ταχύτητα είναι μικρή, το μεγαλύτερο μέρος της προσφερόμενης ενέργειας καταναλίσκεται προκειμένου το σώμα να αυξήσει την ταχύτητά του, ενώ ένα μικρό ποσοστό συσσωρεύεται στα δομικά συστατικά του σώματος.

Αν συνεχίσουμε να προσφέρουμε ενέργεια στο σώμα, και όταν πλέον αυτό έχει αποκτήσει σχετικιστικές ταχύτητες, το φαινόμενο αντιστρέφεται και μόνο ένα ελαχιστότατο μέρος της προσφερόμενης ενέργειας καταναλίσκεται για να αυξηθεί η ταχύτητα του αντικειμένου, ενώ το συντριπτικά μεγαλύτερο μέρος της αποθηκεύεται στα δομικά συστατικά του. Η συνεχής αυτή συσσώρευση ενέργειας θεωρητικά θα συνεχιστεί επ' άπειρον.

Η συσσώρευση όμως τεράστιων ποσών ενέργειας στα δομικά συστατικά του αντικειμένου περιμένουμε να μεταβάλλει και μια σειρά ιδιοτήτων του, μεταξύ των οποίων και την αδρανειακή του κατάσταση, δηλαδή την αίσθηση της τιμής της μάζας του, όπως τουλάχιστον εμείς, με τη βοήθεια της ανθρώπινης λογικής μας, την αντιλαμβανόμαστε.

Πώς ανιχνεύουμε την ύπαρξη μιας Μελανής Οπής

Μια κλασική μαύρη τρύπα, όπως έχουμε αναφέρει ήδη, δεν επιτρέπει στην ύλη και στην ενέργεια —που βρίσκονται μέσα στον ορίζοντα γεγονότων— να γίνουν αντιληπτές από τον παρατηρητή, ο οποίος βρίσκεται έξω απ' αυτήν. Με άλλα λόγια μια μαύρη τρύπα είναι στην ουσία αόρατη. Συνεπώς είναι φανερό ότι η ύπαρξή της μπορεί να γίνει αντιληπτή μόνο από φαινόμενα που δημιουργούνται λόγω της επίδρασής της πάνω σε σώματα τα οποία βρίσκονται έξω απ' αυτήν.

Δηλαδή, αν ένα κανονικό αστέρι περιφέρεται γύρω από μια μαύρη τρύπα, συνήθως, το μεγάλο βαρυτικό πεδίο της δημιουργεί μια ροή ύλης από το αστέρι προς αυτήν. Η εν λόγω ύλη ακολουθεί μια σπειροειδή τροχιά, πριν

χαθεί πίσω από τον ορίζοντα της μαύρης τρύπας, δημιουργώντας γύρω της έναν δίσκο που ονομάζεται *δίσκος συσσώρευσης* ή *δίσκος προσαύξεσης* (*accretion disc*) και του οποίου η θερμοκρασία υπερβαίνει το ένα εκατομμύριο βαθμούς. Η ονομασία του οφείλεται στο γεγονός ότι το υλικό των δίσκων αυτών προσauζάνει το υλικό των μελανών οπών. Λόγω της υψηλής θερμοκρασίας του, ο δίσκος συσσώρευσης εκπέμπει έντονη ακτινοβολία Χ, την οποία μπορούμε να ανιχνεύσουμε.

Οι δίδυμοι πίδακες

Στο περιβάλλον μιας μελανής οπής μπορούν να δημιουργηθούν δίδυμοι πίδακες υλικού μέσω των επόμενων τεσσάρων φυσικών διαδικασιών*:



1. Άνεμος που πνέει από το δίσκο προσauζησης δημιουργεί μια φυσαλίδα στο εσωτερικό ενός περιστρεφόμενου ψυχρού νέφους αερίων, το οποίο περιβάλλει το δίσκο. Το θερμό αέριο της φυσαλίδας προκαλεί ανοίγματα στο νέφος κατά μήκος του άξονα περιστροφής του και, μέσω αυτών, εκτινάσσεται το θερμό αέριο σχηματίζοντας πίδακες.

2. Ο δίσκος φουσκώνει λόγω πίεσης

που οφείλεται στη μεγάλη εσωτερική ενέργειά του και η επιφάνεια του φουσκωμένου περιστρεφόμενου δίσκου σχηματίζει δύο χοάνες, οι οποίες ευθυγραμμίζουν τον άνεμο του δίσκου και δημιουργούν τους δύο πίδακες.

3. Οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές του δίσκου αναγκάζονται να περιστραφούν μαζί του. Καθώς περιστρέφονται, εκσφενδονίζουν πλάσμα τόσο προς τα επάνω όσο και προς τα κάτω, το οποίο κινούμενο κατά μήκος των δυναμικών γραμμών σχηματίζει τους δύο μαγνητισμένους πίδακες.

4. Οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές που διαπερνούν τη μαύρη τρύπα αναγκάζονται να περιστραφούν λόγω του στροβιλισμού του χώρου της τρύπας καθώς αυτές περιστρέφονται, εκσφενδονίζουν προς τα επάνω και προς τα κάτω πλάσμα, κατά μήκος των δυναμικών γραμμών, με αποτέλεσμα να σχηματίζονται οι δύο μαγνητικοί πίδακες.

*Από το βιβλίο του Kip S. Thorne: *Μαύρες Τρύπες και στρεβλώσεις του Χωροχρόνου*, Εκδόσεις Κάτοπτρο, Αθήνα 1999.

Επίσης, αν η μελανή οπή είναι μέλος διπλού συστήματος αστερών, μπορεί να «διαπιστωθεί» η ύπαρξή της τόσο από τις βαρυτικές της επιδράσεις, όσο και από τη μελέτη των ακτίνων X που εκπέμπονται γύρω της.

Τη δεκαετία του '60 ανιχνεύτηκε ισχυρή ακτινοβολία X προερχόμενη από την περιοχή του αστερισμού του Κύκνου. Η πηγή ονομάστηκε Κύκνος X-1 (Cyg X-1) και βρισκόταν στην απόσταση των 7.000 ε.φ. Το 1971 οι αστρονόμοι εντόπισαν στην περιοχή αυτή έναν μπλε υπεργίγαντα φασματικού τύπου B0, που του έδωσαν την κωδική ονομασία *HDE 226868*. Το φάσμα του όμως παρουσίαζε περιοδικές μεταβολές, πράγμα που σημαίνει ότι έχει περιοδική κίνηση και συνεπώς υφίσταται την έλξη ενός συνοδού. Σύμφωνα με τους υπολογισμούς των αστρονόμων αυτό το αστερί, κάθε 5,6 ημέρες, περιφερόταν γύρω από ένα αόρατο αντικείμενο με μάζα μεταξύ 8 έως 18 ηλιακών μαζών, που —όπως πιστεύουμε σήμερα— πιθανότατα πρόκειται για μια μελανή οπή. Αέριο φεύγει από τον ορατό αστέρα του διπλού συστήματος και σχηματίζει γύρω από τον αόρατο συνοδό το δίσκο προσαύξεσης. Τα άλλα σωμάτια που κατευθύνονται προς τη μελανή οπή, όταν χτυπήσουν το δίσκο προσαύξεσης, αποκτούν μεγάλες επιταχύνσεις, οι οποίες προκαλούν ακτινοβολία ακτίνων X. Στη συνέχεια εντοπίστηκαν δύο ακόμα περιοχές «ύποπτες» σαν μαύρες τρύπες, η V404 στον αστερισμό του Κύκνου και η AO620-00 στον αστερισμό του Μονόκερου. Επίσης έχουμε ενδείξεις ότι η γνωστή πηγή ακτίνων X στον πυρήνα του σφαιρωτού σμήνους NGC 6624 μάλλον είναι μελανή οπή. Επιπλέον πρόσφατες παρατηρήσεις, έδειξαν ότι στο κέντρο του γαλαξία NGC4258 μάλλον «υπάρχει» μια μαύρη τρύπα, όπως «αποδεικνύει» η ακτινοβολία από το δίσκο κοντά στο κέντρο του. Τον Ιούνιο του 1992 παρατηρήσεις από το Hubble Space Telescope έδειξαν ότι στο κέντρο του γαλαξία M51, που βρίσκεται σε απόσταση 20 εκατομμυρίων ετών φωτός μακριά από μας, εντοπίζεται μάλλον μια μελανή οπή. Στο κέντρο του γαλαξία, που φωτογραφήθηκε με ηλεκτρονικά μέσα, διακρίνεται ένα τεράστιο σκοτεινό «X». Οι ειδικοί επιστήμονες, που ελέγχουν τις παρατηρήσεις από το HST, δεν μπορούν να εξηγήσουν το σχήμα του, ενώ ο αστροφυσικός Holland Ford, από το Πανεπιστήμιο *John Hopkins*, δήλωσε ότι: *«μοιάζει σαν να είναι έτσι σχεδιασμένο για να τραβήξει την προσοχή μας»*.

Η μελανή Οπή Cyg X -1

Το φάσμα του υπεργίγαντα HDE 226868, φασματικού τύπου B0, χαρακτηρίζεται από μια μετατόπιση Doppler που μεταβάλλεται περιοδικά με τροχιακή περίοδο 5,6 ημερών. Το πλάτος της αντίστοιχης μεταβολής ταχύτητας, συνδυαζόμενο με την εκτίμηση ότι ο υπεργίγαντας, κατά πάσα πιθανότητα, έχει μάζα περίπου 30 ηλιακές μάζες, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι υπάρχει αόρατος συνοδός αρκετά μεγάλης μάζας. Διαφορετικά, ο αόρατος

συνοδός ακτίνων X δεν θα μπορούσε να ασκήσει αρκετή βαρυτική έλξη, ώστε να προκαλέσει την παρατηρούμενη τροχιακή παλινδρόμηση του υπεργίγαντα. Ο Boyton υπολόγισε ότι η ελάχιστη μάζα που μπορεί να έχει ο αόρατος αυτός συνοδός ισούται με τουλάχιστον έξι ηλιακές μάζες.

Αφού η πηγή ακτίνων X πρέπει να είναι ένα συμπαγές αντικείμενο (λευκός νάνος, αστέρας νετρονίων ή μελανή οπή) και εφόσον η ελάχιστη μάζα της πηγής ακτίνων X (έξι ηλιακές μάζες) υπερβαίνει τη μέγιστη επιτρεπτή μάζα έτσι ώστε το αντικείμενο να είναι ένας λευκός νάνος ή αστέρας νετρονίων, το πιθανότερο είναι ότι αυτή η πηγή ακτίνων X στην περιοχή του Κύκνου (Cyg X-1) είναι μια μελανή οπή.

Αν η σκέψη αυτή είναι ορθή, οι ακτίνες X προέρχονται από τα σωμάτια που χτυπούν στο δίσκο προσαύξησης και μετατρέπουν την κινητική τους ενέργεια σε ακτίνες X.

Ένα άλλο γεγονός που συνηγορεί ότι ο Cyg X-1 είναι μια μελανή οπή, είναι ότι οι παρατηρήσεις δείχνουν μεταβολές στην ακτινοβολία X με περίοδο 0,1 sec. Δηλαδή η περιοχή έντονης ακτινοβολίας X έχει διαστάσεις 0,1 sec του φωτός (=30.000 Km). Συνεπώς ο αστέρας έχει διάμετρο μικρότερη από 30.000 Km και τέτοιοι αστέρες είναι μόνον εκείνοι που έχουν υποστεί κατάρρευση. Συμπεραίνουμε λοιπόν, από το πλήθος αυτών των ενδείξεων, πως ο Cyg X-1 πιθανώς να είναι μια μελανή οπή.

Επομένως οι μαύρες τρύπες μπορούν να αναγνωριστούν μόνο έμμεσα από την ακτινοβολία υψηλών ενεργειών που εκπέμπει το αέριο το οποίο τις περιβάλλει ή όταν είναι μέλη διπλών συστημάτων άστρων. Τότε μπορεί να διαπιστωθεί η παρουσία τους από τις βαρυτικές τους επιδράσεις. Επίσης εντοπίζονται από τις πολύ μεγάλες ταχύτητες που αποκτά η ύλη όταν πλησιάζει μια μαύρη τρύπα. Συνήθως οι ταχύτητες είναι πολύ μεγάλες, ίσως $1,5 \times 10^6$ Km/h, και αποτελούν αδιάψευστη μαρτυρία για την ύπαρξη μιας μελανής οπής.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε ότι ο σχηματισμός μιας μαύρης τρύπας στο κέντρο ενός γαλαξία συνοδεύεται από τρία, μάλλον εύκολα, παρατηρήσιμα φαινόμενα:

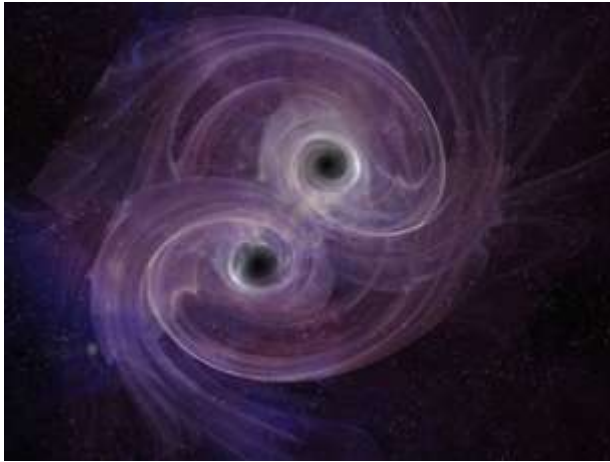
1. Τα αστέρια στη γειτονία της μελανής οπής περιφέρονται με μεγάλη ταχύτητα γύρω από ένα αόρατο ελκτικό κέντρο.
2. Σχηματίζονται δίσκοι ιονισμένου αερίου (δίσκοι προσαύξησης), που σταδιακά εισέρχονται μέσα στη μαύρη τρύπα εμπλουτίζοντάς την σε υλικό.
3. Τέλος, εκτοξεύονται με μεγάλη ταχύτητα πίδακες ιονισμένου αερίου κατά μήκος του άξονα περιστροφής της μαύρης τρύπας, τα καλούμενα Jets (πίδακες ροής).

Πράγματι, η ταχύτατα περιστρεφόμενη μαύρη τρύπα αναγκάζει τον δίσκο προσαύξησης να περιστρέφεται κι αυτός με μεγάλες ταχύτητες.

Δημιουργούνται μαγνητικά πεδία που προσανατολίζονται κατά μήκος του άξονα περιστροφής της μελανής οπής. Τότε τεράστιοι πίδακες ιονισμένου αερίου εκτινάσσονται από το αόρατο κέντρο και διαδίδονται εκατομμύρια έτη φωτός μακριά, παραμένοντας εγκλωβισμένοι σε στενές δέσμες από μαγνητικά πεδία. Ένας μηχανισμός που ουσιαστικά ακόμα δεν έχει διερευνηθεί επαρκώς. Άλλωστε άμεσα θα ήταν σχεδόν αδύνατον να εντοπίσουμε τις μελανές οπές. Όπως αναφέραμε ήδη, σύμφωνα με τη θεωρία, μαύρες τρύπες —κατά πάσα πιθανότητα— βρίσκονται στο κέντρο των ενεργών γαλαξιών. Ο κοντινότερος όμως σε μας σπειροειδής γαλαξίας, ο γαλαξίας της Ανδρομέδας, βρίσκεται σε απόσταση πάνω από δύο εκατομμύρια έτη φωτός και έτσι η πιθανή μαύρη τρύπα στο κέντρο του θα είχε γωνιακή απόσταση λίγα δισεκατομμυριοστά της μοίρας, δηλαδή θα ήταν πάρα πολύ μικρή για να εντοπιστεί ως σκοτεινή κενή περιοχή από οποιοδήποτε τηλεσκόπιο.

Διπλές μαύρες τρύπες

Οι Ολλανδοί αστρονόμοι Jelle Kaastra και Nico Roos του Αστεροσκοπείου του Leiden, ανακάλυψαν την ύπαρξη διπλών περιστρεφόμενων μελανών οπών στα κέντρα δύο εξωγαλαξιακών αντικειμένων, του κβάζαρ 3C273*, που



βρίσκεται σε απόσταση 240 εκατομμυρίων ετών φωτός και του γιγαντιαίου ελλειπτικού γαλαξία M87, που κείται 52 εκατομμύρια έτη φωτός, μακριά από τη Γη.

Όσον αφορά τις σύγχρονες θεωρίες σχηματισμού τους, οι ερευνητές διαπιστώνουν ότι όταν δύο γαλαξίες συγχωνευθούν μέσω μιας τυχαίας σύγκρουσής τους — γεγονός που, όπως θα δούμε

παρακάτω, χιουμοριστικά οι αστρονόμοι το ονόμασαν *γαλαξιακό κανιβαλισμό*— είναι πολύ πιθανόν να σχηματιστεί ένα ζεύγος μελανών οπών, που η μία θα περιστρέφεται γύρω από την άλλη. Το ίδιο φαινόμενο είναι πολύ πιθανόν να παρατηρηθεί και στην περίπτωση που καθένας από τους συγκρουσθέντες γαλαξίες περιλαμβάνει ήδη στη δομή του μια μελανή οπή. Αποτέλεσμα της ύπαρξης του περιστρεφόμενου ζεύγους των μελανών οπών είναι η ανάπτυξη ενός κύματος βαρύτητας (βλέπε σελίδα...). Το φαινόμενο αυτό δημιουργείται λόγω του γεγονότος ότι η περιστροφή των δύο μελανών οπών προκαλεί διαταραχή στη γεωμετρία του χωροχρόνου μέσω της οποίας μεταφέρεται ενέργεια με την ταχύτητα του φωτός.

* Ο συμβολισμός αυτός σημαίνει: 3C=τρίτος κατάλογος του Cambridge, η υπό αύξοντα αριθμό 273 ραδιοπηγή.

Σήμερα πιστεύουμε ότι αποτέλεσμα της ύπαρξης μιας μελανής οπής στο εσωτερικό ενός γαλαξία είναι η δημιουργία λεπτών πιδάκων από αέρια, τα οποία θεωρούνται κατάλοιπα της μάζας που χάνεται πίσω από τον ορίζοντά της.

Όπως υποστήριξαν οι Ολλανδοί αστρονόμοι Jelle Kaastra και Nico Roos, ακόμα και αν μόνον η μία από τις δύο μελανές οπές του ζεύγους δημιουργήσει τους εν λόγω πίδακες, το βαρυτικό πεδίο της δεύτερης θα προκαλέσει μεταπτωτικά φαινόμενα πάνω τους, γύρω από τον άξονα περιστροφής της οπής που τους δημιούργησε. Ομοίως η κίνηση της μαύρης τρύπας — δημιουργού των πιδάκων— γύρω από τη μελανή οπή-συνοδό θα επιφέρει περιοδικές μεταβολές στη διεύθυνση των κοσμικών αυτών σιντριβανιών.

Η μελέτη των περιοδικών αυτών μεταβολών μπορεί να μας δώσει μια σειρά στοιχείων για το ζεύγος των μελανών οπών. Με τον τρόπο αυτό οι δύο Ολλανδοί αστροφυσικοί διαπίστωσαν ότι η κατώτατη τιμή της μάζας του ζεύγους των μελανών οπών του γαλαξία M87 είναι περίπου 19 εκατομμύρια φορές μεγαλύτερη από του Ήλιου μας, ενώ η ανώτατη εκτιμούν ότι ίσως είναι 2,6 δισεκατομμύρια φορές μεγαλύτερη. Σ' αυτό το ζεύγος, το ένα μέλος διαγράφει μία πλήρη περιφορά γύρω από το άλλο σε 23 περίπου έτη, με ταχύτητα 2.800 Km/sec περίπου. Η απόσταση μεταξύ των μελών του ζεύγους υπολογίστηκε ότι προσεγγίζει το πεντηκονταπλάσιο της απόστασης Ήλιου-Πλούτωνα.

Η ύπαρξη του ζεύγους των μελανών οπών έγινε πλέον πιο πιστευτή μετά την ανακοίνωση των πρώτων αποτελεσμάτων από τις παρατηρήσεις του Διαστημικού Τηλεσκοπίου Hubble (HST), τον Ιανουάριο του 1992, που εντόπισε την ύπαρξη ενός συμπαγούς αντικειμένου, μάζας δύο δισεκατομμυρίων ηλιακών μαζών, μέσα στα όρια του γαλαξία M87.

Όσον αφορά τη διπλή περιστρεφόμενη μελανή οπή του ημιαστέρα 3C273, υπολογίζεται ότι η συνολική μάζα του ζεύγους των μελανών οπών προσεγγίζει τα 7.300 εκατομμύρια ηλιακές μάζες και η περίοδος περιφοράς του βρίσκεται μεταξύ 5.000 και 11.000 ετών.

Πάντως, σύμφωνα με τη θεωρία που έχει αναπτύξει ο Άγγλος αστρονόμος Donald Lynden-Bell (1935-) για τους κβάζαρς, στο κέντρο τους πρέπει να υπάρχει μια τεράστια μελανή οπή με μάζα της τάξεως των 10^8 Mo (βλέπε σελίδα...). Η θεωρία αυτή υποστηρίζει ότι η ενέργεια των κβάζαρς οφείλεται σε συνεχή πτώση άστρων μέσα στη μελανή οπή που βρίσκεται στο κέντρο τους.

Μαύρες τρύπες στα κέντρα γαλαξιών

Τα επιστημονικά στοιχεία που διαθέτουμε σήμερα μας οδηγούν στο πιθανό συμπέρασμα ότι οι πυρήνες των περισσότερων γιγαντιαίων κανονικών γαλαξιών, όπως ο Γαλαξίας μας και ο γαλαξίας της Ανδρομέδας, ακόμα και κάποιων μικρών γαλαξιών όπως ο M32 –ο νάνος συνοδός της Ανδρομέδας- είναι χώροι που φιλοξενούν μελανές οπές.

Όπως μας αποκαλύπτουν σύγχρονες αστρονομικές παρατηρήσεις, υπάρχει πιθανότητα στις κεντρικές γαλαξιακές περιοχές που βρίσκονται στη διεύθυνση του αστερισμού του Τοξότη να υπάρχει μια δίνη που μέσα της στροβιλίζεται ύλη χιλιάδων ηλιακών μαζών. Πράγματι οι παρατηρήσεις του K. Jansky, από το 1931, είχαν δείξει την ύπαρξη μιας ισχυρής πηγής ραδιοφωνικής ακτινοβολίας προς την κατεύθυνση του κέντρου του Γαλαξία μας. Τη δεκαετία του '70 αποδείχθηκε ότι η ακτινοβολία αυτή προερχόταν από μια πολύ μικρή περιοχή που ονομάστηκε Sagittarius A. Στη συνέχεια οι παρατηρήσεις από τηλεσκόπια ακτίνων X, εγκατεστημένα σε τεχνητούς δορυφόρους, έδειξαν ότι η πηγή Sagittarius A εκπέμπει έντονα και ακτίνες X.

Το πρόβλημα, λοιπόν, εστιάζεται αφενός μεν στο γεγονός ότι είναι αδύνατον να εγκλωβιστεί μια τόσο μεγάλη μάζα σ' έναν περιορισμένο χώρο, αν στην περιοχή αυτή δεν υπάρχει ένα τεράστιο βαρυτικό πεδίο που να την έλκει, και αφετέρου στην έντονη ακτινοβολία X που παρατηρήθηκε και καταγράφηκε. Λόγω των γεγονότων αυτών, υποθέτουμε σήμερα ότι στο χώρο που θεωρείται το δυναμικό κέντρο του Γαλαξία μας ίσως κρύβεται μια μαζικότερη μαύρη τρύπα, ενώ το υλικό της παρατηρούμενης δίνης αποτελεί το δίσκο συσσώρευσης, που αγκαλιάζει τον ορίζοντα γεγονότων της μαύρης τρύπας.

Σχετικά πρόσφατα προστέθηκαν νέες ενδείξεις για το ότι στο κέντρο του Γαλαξία μας βρίσκεται μια μελανή οπή. Μετρήθηκαν μέσω του NTT (New Technology Telescope) του ESO στη Χιλή, οι κινήσεις 39 αστεριών στη γειτονία της πηγής Sagittarius A. Βρέθηκε ότι οι αστέρες αυτοί κινούνται με πολύ μεγάλες ταχύτητες γύρω από το κέντρο του Γαλαξία μας, έτσι ώστε η αναπτυσσόμενη φυγόκεντρος δύναμη να είναι πραγματικά πάρα πολύ μεγάλη. Άρα, για να αντισταθμιστεί αυτή η φυγόκεντρος δύναμη, πρέπει αντίστοιχα να υπάρχει μια τεράστια ελκτική δύναμη*. Δηλαδή, εκ των πραγμάτων, οδηγούμαστε στην υπόθεση ότι στο κέντρο του Γαλαξία μας υπάρχει μια τεράστια μελανή οπή με μάζα $2,5 \times 10^6 M_{\odot}$, συγκεντρωμένη σε μια περιοχή διαμέτρου 0,1 ετών φωτός!

* Παρατηρήσεις έκανε και ο Charles Townes και οι συνεργάτες του στο Πανεπιστήμιο της Καλιφόρνια στο Μπέρκλεϋ.

Για να ακριβολογήσουμε όμως, η ύπαρξη μιας μαύρης τρύπας δεν είναι η μόνη λύση του προβλήματος. Σύμφωνα με κάποιες άλλες απόψεις το φαινόμενο αυτό μπορεί να δημιουργείται από τον υπέρπυκνο πυρήνα ενός ασυνήθιστα μαζικού αστρικού σμήνους. Πάντως, ασχέτως του ποια άποψη είναι σωστή, αυτό για το οποίο μπορούμε να είμαστε βέβαιοι είναι ότι ο πυρήνας του Γαλαξία μας αποτελεί το θέατρο βίαιων γεγονότων και δεν έχει καμία σχέση με το ήρεμο «προάστιό» του στο οποίο φιλοξενείται το ηλιακό μας σύστημα.

Το φαινόμενο αυτό λοιπόν, αν πραγματικά υφίσταται, μήπως θα πρέπει να μας προβληματίζει σε σχέση με το μέλλον της Γης και της ανθρώπινης επιβίωσης;

Η απάντηση είναι σαφώς καθησυχαστική.

Όπως αναφέρει ο Kip S. Thorn στο βιβλίο του *Μαύρες τρύπες και στρεβλώσεις του Χωροχρόνου*:

«Αν η τρύπα καταβρόχθιζε τελικά το μεγαλύτερο μέρος της μάζας του Γαλαξία μας, τότε κατά τη διαστολή της τρύπας η περίμετρός της θα γινόταν περίπου ίση με 1 έτος φωτός, δηλαδή και πάλι θα ήταν 200.000 φορές μικρότερη από την περίμετρο της τροχιάς της γης περί τον Ήλιο.

Φυσικά, ύστερα από 10^{18} περίπου έτη (100 εκατομμύρια φορές τη σημερινή ηλικία του Σύμπαντος) που απαιτούνται ώστε η κεντρική τρύπα του Γαλαξία μας να καταβροχθίσει ένα μεγάλο μέρος της μάζας του, η τροχιά της Γης και του Ήλιου θα έχουν μεταβληθεί σημαντικά. Δεν είναι δυνατόν να προβλέψουμε τις λεπτομέρειες αυτών των μεταβολών, εφόσον δεν γνωρίζουμε αρκετά καλά τις θέσεις και τις κινήσεις όλων των άλλων άστρων που μπορεί να συναντήσει ο Ήλιος και η Γη κατά τη διάρκεια των ετών αυτών. Ωστόσο μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι το τέλος της γης, αν τελικά ο πλανήτης μας οδηγηθεί στα σωθικά της τρύπας, προβλέπεται να επέλθει σε 10^{18} περίπου έτη, τόσο μεγάλο διάστημα ώστε είναι σχεδόν σίγουρο ότι, εν τω μεταξύ, μοιραία θα έχουν συμβεί στη Γη και στην ανθρωπότητα πολλές καταστροφές».

«Το σύμπαν δεν είναι μόνο πιο παράξενο απ' ό,τι φανταζόμαστε. Είναι πιο παράξενο απ' ό,τι μπορούμε να φαντασθούμε...» Τ.Μ.Σ. Χάλντεην. Όπως αναφέραμε παραπάνω το σώμα που προκύπτει από την βαρυτική κατάρρευση ενός μαζικού αντικειμένου καλείται μελανή οπή. Το όνομά της οφείλεται στο ότι το φως δεν μπορεί να διαφύγει την έλξη στην επιφάνειά της με αποτέλεσμα το σώμα να είναι απόλυτα σκοτεινό. Η ακτίνα Schwarzschild μιας μελανής οπής λέγεται *«ορίζων των γεγονότων»* μια και εκεί βρίσκεται το όριο των πραγμάτων που μπορούμε να παρατηρήσουμε. Το ισχυρό βαρυτικό πεδίο γύρω από μια μελανή οπή προκαλεί την συνεχή ροή της ύλης προς αυτήν με

αποτέλεσμα η μάζα της να αυξάνει καθώς και η ακτίνα Schwarzschild της μελανής οπής $r_g = \frac{2kM}{c^2}$ δηλαδή το μέγεθός της.

Βαρυτική Κατάρρευση

Μια μελανή οπή έχει 3 χαρακτηριστικά που καθορίζουν και περιγράφουν πλήρως την συμπεριφορά και την μορφή της, την μάζα, το φορτίο και την στροφορμή της, και 2 τρόπους ανίχνευσης της υπάρξεώς της, το πεδίο βαρύτητας που δημιουργείται από αυτήν και την ακτινοβολία X μαζί με την ακτινοβολία βαρύτητας που εκπέμπει η ύλη που ρέει προς αυτήν καθώς σχηματίζει γύρω της δακτυλίους και περιβλήματα συγκρουομένη και συνωθουμένη προς την μελανή οπή. Είναι φανερό ήδη πως το είδος και η συμπεριφορά μιας μελανής οπής θα εξαρτάται από την κατάσταση (Μάζα, περιστροφή, πίεση, φορτίο, κ.λ.π.) και τα χαρακτηριστικά του σώματος που υπέστει την κατάρρευση.

Γι' αυτό προοδευτικά μπορούμε να εξετάσουμε τις διάφορες μορφές των μελανών οπών από τη μελανή οπή του Schwarzschild (ουδέτερη χωρίς φορτίο και χωρίς στροφορμή), του Kerz (στροφορμή αλλά όχι φορτίο) μέχρι τις μελανές οπές που προκύπτουν από τη γενικευμένη θεωρία βαρύτητας με φορτίο και στροφορμή μετά από μερικές τελευταίες (1977-78) λύσεις των γενικευμένων εξισώσεων του πεδίου Maxwell-Einstein (ηλεκτρομαγνητικό + βαρύτητας).

Γι' αυτό θα χωρίσουμε την παράγραφο αυτή στις αναγκαίες υποπαραγράφους.

Βαρυτική Κατάρρευση Σφαιρικού και μη περιστρεφόμενου σώματος χωρίς Φορτίο (Μελανή Οπή Schwarzschild).

Στην προηγούμενη παράγραφο αναφέραμε ήδη την μετρική του Schwarzschild και δείξαμε (εξισώσεις 3.23-3.28) τη μορφή του ds^2 :

$$ds^2 = (1 - r_{g/r})c^2 dt^2 - \left(\frac{dr^2}{1 - r_{g/r}} \right) - r^2 (\sin^2 \theta d\Phi^2 + d\theta^2)$$

Σ' αυτή τη μετρική όταν $r \rightarrow r_g$ φαίνεται αμέσως $g_{00} \rightarrow 0$, $g_{11} \rightarrow \infty$ ($x^0 = ct, x^1 = r$) και αυτό εκ πρώτης όψεως δείχνει ότι δεν θα μπορούσε να υπάρχει σώμα με $r \leq r_g$. Το συμπέρασμα αυτό όμως ανατρέπεται αν παρατηρήσουμε ότι η ορίζουσα $g = |(g_{ik})|$ του μετρικού ταυυστή δεν έχει καμιά ανωμαλία για $r = r_g$, ή $g = -r^4 \sin^2 \theta$, και για $r = r_g$ απλώς $g = -r_g^4 \sin^2 \theta$ ακόμα στην παράγραφο 2 είδαμε ότι ούτε η πυκνότητα μάζας ϵ ούτε η πίεση ούτε η δύναμη F έχουν καμιά «ανωμαλία» στην περιοχή r_g (ή r_o αντίστοιχα) (εξισώσεις 3.12, 3.13, 3.15). δηλαδή κανένας φυσικός νόμος δεν παραβιάζεται

στην περιοχή αυτή αφού και η πυκνότητα μάζας και η πίεση και η δύναμη και η καμπυλότητα R ορίζεται και έχει πεπερασμένη τιμή το μηδέν $R=0$ και η ορίζουσα g του μετρικού τανυστη συνεχίζει να ικανοποιεί την συνθήκη $g < 0$ πράγμα που σημαίνει πως το στοιχείο όγκου $\sqrt{-g}dx^2$ όπου $d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ συνεχίζει να ορίζεται και να υπάρχει.

Το όλο πρόβλημα στο $r=r_g$ περιορίζεται μόνο στο ότι δεν μπορούμε να αποκαταστήσουμε ένα σταθερό σύστημα αναφοράς για $r < r_g$. Για να καθορίσουμε τον χαρακτήρα της μετρικής για $r < r_g$ κάνουμε τον εξής μετασχηματισμό συντεταγμένων.

$$c\tau = \pm ct \pm \int \frac{f(r)dr}{1-r_{g/r}} \quad (4\alpha.1)$$

$$R = ct + \int \frac{f(r)dr}{f(r)(1-r_{g/r})} \quad (4\alpha.2)$$

τότε το ds^2 γίνεται:

$$ds^2 = \frac{1-r_{g/r}}{1-[f(r)]^2} (c^2 d\tau^2 - f^2 dR^2) - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Phi^2)$$

αν θέσω $f(r) = \sqrt{r_{g/r}}$ το σύστημά μου θα είναι σύγχρονο δηλ. $g_{00}=1$ και θα έχω:

$$f(r_g) = 1$$

στην (4α.1) επιλέγω το + από τα (+) και (-) και έχω:

$$R = c\tau + \int \frac{1-f^2 dr}{f(1-r_{g/r})} = \int \sqrt{\frac{r}{r_g}} dr \rightarrow$$

$$R = c\tau = \frac{2r^{3/2}}{3r_g^{3/2}} \quad (4\alpha.3)$$

ή λύνοντας ως προς r :

$$r = \left(\frac{3}{2} (R - c\tau) \right)^{2/3} r_g^{1/3} \quad (4\alpha.4)$$

[έθεσα στην 4α.3 την σταθερά ολοκληρώσεως ίση με 0 γιατί αντιπροσωπεύει την αρχή του χρόνου και έχω ελευθερία ως προς αυτή την εκλογή].

Τότε το ds^2 γίνεται:

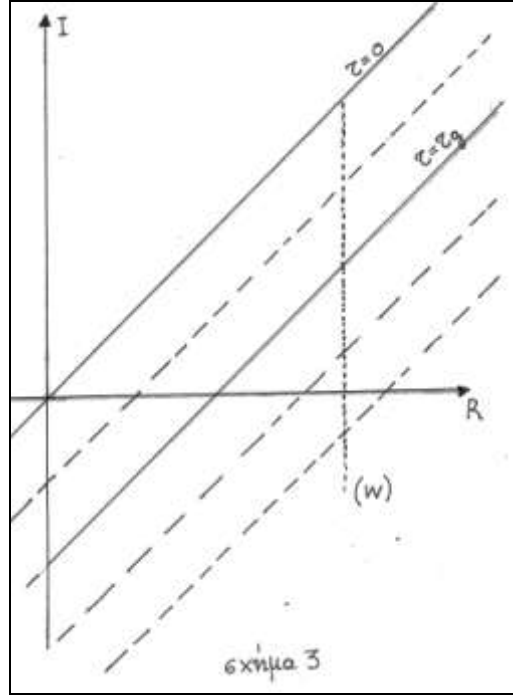
$$ds^2 = c^2 dr^2 - \frac{dR^2}{\left[\frac{3}{2r_g} (R - c\tau) \right]^{2/3}} -$$

$$- \left(\frac{3}{2} (R - c\tau) \right)^{4/3} r_g^{1/3} (d\theta^2 \sin^2 \theta + d\Phi^2) \quad (4\alpha.5)$$

Παρατηρώ ότι η ανωμαλία της μετρικής για $r = r_g$ γίνεται:

$$r = r_g \rightarrow r_g = \frac{3}{2}(R - c\tau)$$

τότε : $g_{RR} = -1$ $g_{00} = 1$ $g_{\phi\phi} = -r_g^2 \sin^2 \theta$ $g_{\theta\theta} = -r_g^2$ δηλαδή η «ανωμαλία» της μετρικής στο $r = r_g$ δεν υπάρχει πια.



Όπως σε κάθε «σύγχρονο» σύστημα οι κοσμικές γραμμές που αντιστοιχούν σε «σώματα» βρισκόμενα σε ηρεμία ως προς αυτό το σύστημα είναι ευθείες παράλληλες στον άξονα τ δηλαδή οι χρονικές γραμμές είναι γεωδαισιακές. Για κάθε τιμή $r=\text{σταθ.}$ αντιστοιχεί η κοσμική γραμμή $R-ct=\text{σταθ.}$

Ένα σώματιο κινούμενο κατά μήκος της γεωδαισιακής του γραμμής $R=\text{σταθ.}$ (διακεκομμένη ευθεία (w) Σχ. 3) δηλαδή ακίνητο ως προς το σύστημά μας μετά από καθορισμένο και πεπερασμένο χρονικό διάστημα «πέφτει» στην πραγματική «ανωμαλία» $r=0$ του πεδίου που είναι η πραγματική ανωμαλία της μετρικής $g_{\theta\theta} = g_{\phi\phi} = 0$ $g_{RR} = \infty$. Θεωρούμε την κίνηση – διάδοση ακτινικών φωτεινών σημάτων. Για το φως $ds=0$ επίσης $\theta, \phi = \text{σταθ.}$ γιατί θεωρούμε ακτινική διάδοση άρα έχουμε:

$$\frac{cd\tau}{dR} = \pm \frac{1}{\left[\frac{3}{2r_g}(R - c\tau) \right]^{1/3}} = \pm \sqrt{\frac{r_g}{\tau}} \quad (4\alpha.6)$$

Τα 2 σημεία (αλγεβρικά σημεία) $\pm$ αντιστοιχούν στα 2 σύνορα του «κώνου του φωτός» που είναι ο μέγιστος κώνος για δοθέν κοσμικό σημείο. Τότε για $r > r_g$ η κλίση των συνόρων του κώνου του φωτός ικανοποιεί την σχέση $\left| \frac{cd\tau}{dR} \right| < 1$ οπότε η $r = \text{σταθ.}$ $\frac{cd\tau}{dR} = 1$ βρίσκεται μέσα στον κώνο. Αλλά στην περιοχή $r < r_g$ έχουμε $\left| \frac{cd\tau}{dR} \right| > 1$ οπότε η $r = \text{σταθ.}$ η κοσμική γραμμή του σωματίου που βρίσκεται σε ηρεμία ως προς το σύστημα βρίσκεται εκτός του κώνου. Και τα 2 σύνορα του κώνου του φωτός τέμνουν το $r = 0$ σε πεπερασμένη απόσταση φτάνοντάς το κατά μήκος μιας καθέτου γραμμής από Σχ. 3. Και επειδή δεν μπορούν ..κατά συνδεόμενα γεγονότα να βρίσκονται σε κοσμική γραμμή εκτός του κώνου του φωτός έπεται ότι στην $r < r_g$ περιοχή κανένα σώμα δεν βρίσκεται σε ηρεμία αλλά όλα τα πράγματα, οι αλληλεπιδράσεις, τα σήματα φωτεινά και μη διαδίδονται μόνο προς το κέντρο το οποίο και φθάνουν σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα του proper time τ . Όμοια διαλέγοντας τα (-) στην 4α.1 θα είχαμε αντί για καταρρέον ένα σύστημα που εκρήγνυται με μόνο η διαφορά στη μετρική την αντικατάσταση του τ με $-\tau$ δηλ. θα είχαμε:

$$ds^2 = c^2 dr^2 - \frac{dR^2}{\left[\frac{3}{2r_g} (R - c\tau) \right]^{\frac{2}{3}}} - \left(\frac{3}{2} (R - c\tau) \right)^{\frac{4}{3}} r_g^{\frac{2}{3}} (d\theta^2 \sin^2 \theta + d\Phi^2) \quad (4\alpha.7)$$

Η μετρική όμως για ένα σύστημα που δεν συνδέεται με το παραπάνω καταρρέον σώμα είναι:

$$ds^2 = \left(1 - r_{g/r} \right) c^2 dt^2 - \left(\frac{dr^2}{1 - r_{g/r}} \right) - r^2 (\sin^2 \theta d\phi^2 + d\vartheta^2) \quad (4\alpha.8)$$

η οποία δεν επιτρέπει ακτινική απόσταση από το κεντρικό σώμα $r < r_g$.

Αυτό σημαίνει ότι τα ρολόγια που μετρούν τον t σ' ένα μακρινό παρατηρητή θα καθυστερούν όσο $r \rightarrow r_g$ και με $r \rightarrow r_g$ $t \rightarrow \infty$ ασυμπτωτικά. Είναι εύκολο να βρούμε την οριακή μορφή αυτής της εξάρτησης θεωρώντας ένα σώμα (ή σωματίο) μάζας m που εκτελεί ελεύθερα πτώση στο παραπάνω πεδίο.

Γράφομε την εξίσωση Hamilton Jacobi

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} = m^2 c^2 \quad \text{για το πεδίο}$$

θεωρώντας την κίνηση επίπεδη για $\theta = \frac{\pi}{2}$ δηλ. στο επίπεδο $\theta = \frac{\pi}{2}$ που περνά από το κέντρο έλξεως. Τότε έχω:

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{c dt}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \Phi}\right)^2 - m^2 c^2 = 0$$

η γενική λύση της είναι της μορφής

$$S = -E_o t + M\Phi + S_r(r) \quad (4\alpha.10)$$

όπου M η στροφορμή E_o η ενέργεια S η δράση.

Θεωρώντας ελευθέρη πτώση έχω $M=0$ άρα

$$S = -E_o t + S_r(r) \quad (4\alpha.11)$$

με $E_o = mc^2 \left(1 - \frac{r_g}{r_o}\right)^{1/2}$ όπου r_o η αρχική ακτινική απόσταση του σωματίου σε κάποια χρονική στιγμή t_o . Αντικαθιστώντας την (4α.11) στην (4α.9) με M_o έχω:

$$S_r = \int \sqrt{\frac{E_o^2}{c^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-2} - m^2 c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}} \cdot dr \quad (4\alpha.12)$$

και βρίσκω την $r=r(t)$ με την γνωστή μέθοδο $\frac{\partial S}{\partial E_o} = \sigma \alpha \theta \rightarrow$

$$ct = \frac{E_o}{mc^2} \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left[\left(\frac{E_o}{mc^2}\right)^2 - 1 + \frac{r_g}{r} \right]^{1/2}} \text{ και}$$

αντικαθιστώντας $E_o = mc^2 \sqrt{1 - \frac{r_g}{r_o}}$ έχω:

$$c(t - t_o) = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r_o}} \int_{r_o}^r \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{\frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{r_o}}} \quad (4\alpha.13)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό συμπεριφέρεται για $r \rightarrow r_g$ σαν την συνάρτηση $r_g \ln(r - r_g)$ και βρίσκουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της προσεγγίσεως του r στο r_g σαν:

$$r - r_g = \sigma \alpha \theta \cdot e^{-\frac{\alpha}{r_g}} \quad (4\alpha.14)$$

δηλαδή το τελικό στάδιο της προσεγγίσεως του καταρρέοντος σώματος στην βαρυτική του ακτίνα r_g γίνεται με έναν εκθετικό νόμο με πολύ μικρό

χαρακτηριστικό χρόνο $\sim \frac{r_g}{c}$ για τον μακρινό παρατηρητή ενώ για το ίδιο το σωματίο η ταχύτητά του όπως μετράται από τον proper time του σωματίου αυξάνει και φτάνει την ταχύτητα του φωτός.

Στην ουσία σύμφωνα με τη σχέση

$$v^a = \frac{cdx^a}{\sqrt{g_{00}(dx^0 - g_a dx^a)}} \quad \text{όπου } g_a = -\frac{g_{0a}}{g_{00}}$$

έχουμε:

$$v^2 = -\frac{g_{11}}{g_{00}} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \rightarrow 1 - v^2/c^2 = \frac{1 - r_g/r}{1 - r_g/r_o} \quad (4\alpha.15)$$

παίρνοντας την $\frac{dr}{dt}$ από την (4α.13) που δείχνει ότι στο όριο $r = r_g \rightarrow v = c$ και ενώ για τα ρολόγια του μακρινού παρατηρητή η προσέγγιση μέχρι την ακτίνα Schwarzschild χρειάζεται άπειρο χρόνο για το ίδιο το σώμα χρειάζεται χρόνος

$$c\tau = \int ds = \int \left[c^2 g_{00} \frac{dt^2}{dr^2} + g_{11} \right]^{-\frac{1}{2}} dr$$

και $\frac{dr}{dt}$ από την (4α.13) έχουμε:

$$\tau - \tau_o = \frac{1}{c} \int \left(\frac{r_g}{r} - \frac{r_g}{r_o} \right)^{-\frac{1}{2}} dr \quad (4\alpha.16)$$

που το ολοκλήρωμα αυτό συγκλίνει για $r \rightarrow r_g$.

Φτάνοντας στην βαρυτική του ακτίνα το σώμα θα συνεχίσει να καταρρέει και όλα τα σωματίδια που το αποτελούν (γενικά η ύλη του) θα φτάσουν στο κέντρο μετά από πεπερασμένο διάστημα του proper time. Η στιγμή ακριβώς αυτή της καταρρεύσεως της ύλης στο $r=0$ δηλαδή στο κέντρο του πεδίου είναι η πραγματική «ανωμαλία» της μετρικής του χωροχρόνου. Αλλά δεν φάνηκε τουλάχιστον από τα παραπάνω κάτι τέτοιο για την στιγμή της καταρρεύσεως στην ακτίνα Schwarzschild παρά μόνο για τον παρατηρητή που βρισκόταν μακριά παρακολουθώντας ακίνητος την κατάρρευση. Αυτό δεν φανερώνει παρά μόν ένα οριακό δείγμα για την σχετικότητα του χρόνου.

Σε ολόκληρη την παραπάνω εικόνα δεν υπάρχει καμιά λογική αντιγνωμία ή ασυνέπεια. Σε απόλυτη συμφωνία βρίσκεται ο ισχυρισμός πιο πάνω για το σύστημα που καταρρέει. Σ' αυτό το σύστημα κανένα «σήμα» δεν βγαίνει από την σφαίρα Schwarzschild. Σωματίδια και φωτεινές ακτίνες μπορούν να περάσουν αυτήν την σφαίρα (στο σύστημα που κινείται μαζί του) αλλά μόνο προς την κατεύθυνση του κέντρου έλξεως δηλαδή προς το εσωτερικό και ποτέ δεν ξαναβγαίνουν μιας και έχουν περάσει. Αυτή η «μονοδρομική θυρίδα»

(one-way valve) είναι ο «ορίζοντας των γεγονότων». Ως προς τον εξωτερικό παρατηρητή η συρρίκνωση προς την βαρυτική ακτίνα συνοδεύεται και από μια «απομόνωση» του σώματος υπό την έννοια ότι τα σήματα που στέλνονται από το σώμα διαδίδονται σε ένα χρόνο που τείνει προς το άπειρο: Για φωτεινά σήματα έχουμε: $c dt = \frac{dr}{1 - r_g/r}$ αν διαδίδονται κατά την διεύθυνση της

ακτίνας r από το r προς κάποιο $r > r_g$ και ο χρόνος που χρειάζονται για να φθάσουν στο r_o από το r δίδεται τότε από το ολοκλήρωμα:

$$c \Delta t = \int_r^{r_o} \frac{dr}{1 - r_g/r} \rightarrow c \Delta t = r_o - r + r_g \ln \frac{r_o - r_g}{r - r_g} \quad (4\alpha.17)$$

Το ολοκλήρωμα αποκλίνει όπως και το (4α.13) για $r \rightarrow r_g$. Επειδή ο ακριβής χρόνος (proper time) δίδεται από

$$\tau = \frac{1}{c} \int \sqrt{g_{00}} c_o dt \rightarrow \tau = \int \sqrt{1 - r_g/r} dt$$

βλέπουμε ότι το χρονικό διάστημα του ακριβούς χρόνου τ είναι μικρότερο του αντίστοιχου t κατά τον λόγο $\sqrt{g_{00}} = \sqrt{1 - r_g/r} = \frac{d\tau}{dt}$ δηλαδή όλα τα πράγματα καθώς ή επιφάνεια $r \rightarrow r_g$ για τον εξωτερικό παρατηρητή φαίνονται να «παγώνουν».

Η συχνότητα μιας φασματικής γραμμής του εκπεμπόμενου από το σώμα φάσματος (πριν φτάσει το σώμα στη σφαίρα r_g) και την οποία γραμμή λαμβάνει ο εξωτερικός παρατηρητής είναι μετατοπισμένος στο φάσμα, αλλά αυτό δεν οφείλεται μόνο στη βαρυτική κόκκινη μετατόπιση αλλά και στο φαινόμενο Doppler που γίνεται λόγω της κινήσεως της πηγής που πέφτει (καταρρέει) προς το κέντρο μαζί με την επιφάνεια της καταρρέουσας σφαίρας. Όταν η ακτίνα της σφαίρας (του σώματος) έχει φτάσει σε τιμές πολύ κοντά στην r_g (ώστε η ταχύτητα της πηγής να πλησιάζει την ταχύτητα του φωτός) αυτό το φαινόμενο (Doppler) μετατοπίζει την συχνότητα κατά του παράγοντα

$$\frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v/c} \simeq \frac{1}{2} \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

ενώ κάτω από την επίδραση και των 2 φαινομένων μαζί η συχνότητα τείνει στο μηδέν καθώς $r \rightarrow r_g$ με τον νόμο:

$$\omega = \text{σταθ.} \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \quad (4\alpha.18)$$

για την κυκλική συχνότητα ω του σώματος.

Έτσι για τον εξωτερικό παρατηρητή η βαρυτική κατάρρευση οδηγεί στην δημιουργία ενός ιδιάζοντος, πυκνού και απομονωμένου σώματος που δεν στέλνει καθόλου σήματα στον γύρω χώρο του και αλληλεπιδρά με τον «έξω» κόσμο μόνο μέσω του στατικού του πεδίου βαρύτητας. Η εσωτερική εξέλιξη ενός τέτοιου σώματος περιγράφεται από τις εξισώσεις (4α.1)-(4α.7) ενώ η εξωτερική του συμπεριφορά από τις εξισώσεις (4α.8)-(4α.18). Η ενοποιημένη μορφή της μετρικής σε πλήρη κάλυψη και των 2 περιοχών $0 \leq r \leq r_g$ και $r \geq r_g$ περιγράφεται από την πλήρη μετρική που προκύπτει από τις εξισώσεις (33)(38)(39)(40)(49)(50)(51)(52) και Σχ. 2 της παραγράφου 3 αυτού του κεφαλαίου που οδηγεί στην πλήρη μορφή του ds^2

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \left(1 + \frac{R^2}{r_g^2}\right) \left[1 - \cos n + \frac{3}{2} \frac{\sin n(\pi - n + \sin n)}{1 - \cos n}\right]^2 \cdot dR^2 - \\ - \frac{r_g^2}{4} \left(1 + \frac{R^2}{r_g^2}\right) (1 - \cos n)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Phi^2)$$

όπου η n είναι η συνάρτηση των τ και R που ικανοποιεί την εξίσωση:

$$n - \sin n = \pi - \frac{2c\tau}{r_g \left(1 + \frac{R^2}{r_g^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (4\alpha.20)$$

Η μετρική των εξισώσεων (4α.1) – (4α.7) προκύπτει από την εξίσωση (40) του προηγούμενου κεφαλαίου με $c\tau_o(R) = R$, $\varphi(R) = r_g = \text{σταθ. που αντιστοιχεί στο σύστημα ηρεμίας της καταρρεύσεως δηλαδή στο σύστημα ελευθερίας πτώσεως της ύλης στο πεδίο βαρύτητας που προκαλεί την κατάρρευση}.$

Αξιοσημείωτο είναι ότι η μέση ταχύτητα του συστήματος είναι $\frac{R}{\tau_o(R)} = c$ είναι

c για κάθε R . Αυτό είναι απόλυτα σύμφωνο με την αρχή διαδόσεως των αλληλεπιδράσεων που καθορίζει την ταχύτητα διαδόσεώς τους σε c .

Ακόμα συμπληρώνοντας έχουμε ότι: το ότι η ταχύτητα διαδόσεως της αλληλεπιδράσεως βαρύτητας κατά την κατάρρευση φαίνεται c δεν σημαίνει καθόλου ότι η ταχύτητα διαδόσεως του πεδίου είναι c . Αντίθετα ίσως πρέπει να παραδεχθούμε ότι η καμπύλωση του χώρου γίνεται ακριβώς ώστε η αλληλεπίδραση λόγω του πεδίου βαρύτητας να αποκτήσει την πεπερασμένη αυτή ταχύτητα διαδόσεως των αλληλεπιδράσεων. Αυτό θα σήμαινε ότι κάθε σωματίο με υπερφωτεινή ταχύτητα όπως ταχυόνια, λουξόνια, ταρυτιόνια κ.λ.π. θα πρέπει να προκαλεί μια καμπύλωση του χώρου; Όχι φυσικά γιατί ο

νόμος της μάζας τους είναι αντίστροφος $m = \frac{m_o}{\sqrt{\frac{v^2}{c^2} - 1}}$ ώστε η c να είναι το

κατώτατο όριο της v γι' αυτά (αφού η μάζα του m_0 μηδενίζεται για $v=c$ και είναι πραγματική για $v \geq c$ η παραπάνω σχέση είναι φυσικό επακόλουθο). Αντίθετα υλικά σωματίια με υπερφωτεινές ταχύτητες θα πρέπει να καμπυλώσουν τον χώρο σύμφωνα με τα παραπάνω ώστε η ταχύτητα διαδόσεως – κινήσεως ενός υλικού σωματίου –πεδίου όπως το υποθετικό gravitation του πεδίου βαρύτητας, θα πρέπει να καμπυλώνουν τον χώρο.

Πράγματι θεωρώντας ένα υλικό σωματίο στον κενό χώρο και εφαρμόζοντας τους νόμους των υλικών κυμάτων της κβαντομηχανικής βρίσκουμε ότι η

φασική του ταχύτητα (φασική ταχύτητα του κύματος) $v_\phi = \frac{E}{|\vec{P}|} \rightarrow$

$$\rightarrow v_\phi = \frac{\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v}{c^2}}}}{mv \sqrt{1-\frac{v}{c^2}}} \rightarrow v_\phi = \frac{c^2}{v} \quad (4\alpha.21)$$

και ομαδική ταχύτητα του κύματος

$$\vec{v}_g = \vec{\nabla}_{\vec{P}} E = \frac{\partial E}{\partial \vec{P}} \rightarrow \vec{v}_g = \vec{v} \quad (4\alpha.22)$$

δηλαδή η ταχύτης διαδόσεως του κυματοδέματος v_g είναι ίση με την ταχύτητα κινήσεως του σωματίου ενώ η φασική του ταχύτης $v_\phi = \frac{c^2}{v}$ είναι

φανερό $v_\phi = \frac{c^2}{v} \geq c$ για $v \leq c$ δηλαδή η φασική τους ταχύτητα έχει κατώτατο όριο την c για $v \leq c$ $v_\phi \geq c$ και το ίσον ισχύει συγχρόνως. Μέσα σε πεδίο βαρύτητας πάλι ισχύει $v \leq c$ αλλά για την φυσική ταχύτητα βρίσκουμε

$$v_\phi = c \cdot \frac{\sqrt{g_{oo}}}{\sqrt{\frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{c} \sqrt{g_{oo}} \vec{g} \vec{v}}} \quad (4\alpha.23)$$

όπου $\vec{g} = g_a \vec{\nabla} x^a$ $g_a = -\frac{g_{oa}}{g_{ov}}$ και $\vec{g} = 0$ για στατικό πεδίο (αφού για στατικό πεδίο $g_{oa} = 0$) ενώ για την ταχύτητα ομάδος βρίσκουμε την έκφραση

$$v_g = \frac{\sqrt{g_{oo}} v}{1 + \frac{\sqrt{g_{oo}}}{c} \vec{g} \vec{v}} \quad (4\alpha.24)$$

συναρτήσεις της ακριβούς ταχύτητος $v = \frac{d\ell}{d\tau}$, όπου $d\tau$ ο ακριβής χρόνος, και του μετρικού τανυστή.

Από την (4α. 24) βλέπουμε αμέσως ότι $v_g \leq c$ αφού $g_{oo} \leq 1$ $v \leq c$ που φαίνεται πιο εύκολα για την στατική περίπτωση $\vec{g} = 0$. Ενώ $v_\phi \leq \infty$ όταν $v \rightarrow 0$ και $v_\phi = v_g$ όταν $v = c$ με

$$v_g = \frac{\sqrt{g_{oo}}c}{1 + \sqrt{g_{oo}}g \cos \theta}$$

θ η γωνία $(\vec{g}, \vec{c})$ g θετικό γιατί $g = |\vec{g}|$ μέτρο πραγματικού ανύσματος.

Δηλαδή τα όσα ισχύουν για την διάδοση στο κενό ισχύουν και για την διάδοση μέσα στο πεδίο μόνο που τώρα ο μετρικός τανυστής αλλοιώνει τα μέτρα των v_g, v_ϕ του κενού.

Μια διερεύνηση του προβλήματος μας δίνει ότι:

1) Η συνθήκη $v_\phi = v_g$ δεν μας καθορίζει την v όπως στο κενό μονοσήμαντα αν το πεδίο δεν είναι στατικό χρειάζεται να ξέρουμε πρόσθετα και την γωνία $\theta = k(\vec{g}, \vec{v})$ αλλά σε κάθε περίπτωση μας δίνει 4 τιμές της v από την εξίσωση.

$$\frac{g_{oo} v^2 / c^2}{\left(1 + \sqrt{g_{oo}}g \cos \theta \frac{v}{c}\right)^2} \frac{g_{oo}}{v^2 / c^2 + \frac{1}{c} \sqrt{g_{oo}}g \cos \theta v}$$

που γίνεται: $x^4 + \sqrt{g_{oo}}g \cos \theta x^3 - g_{oo}g^2 \cos \theta x^2 - \frac{2g}{\sqrt{g_{oo}}} \cos \theta x - 1 = 0$ όπου $x = \frac{v}{c}$ και

όπου μόνο κάθετη κίνηση προς τον μη στατικό χαρακτήρα του πεδίου μου δίνει $\theta = \frac{v}{2} \rightarrow x^4 = 1 \rightarrow v_{1,2} = \pm c$, $v_{3,4} = \pm ic$ (γιατί $x^2 = \pm 1$).

2) Αν θελήσω να καθορίσω αντίστροφα την μετρική από την ταχύτητα v όπως υποθέτω ότι συμβαίνει για το gravitation θέτω $v_g = c$ γιατί ο χώρος θα αποκτήσει τέτοια μετρική ώστε v_g να μην υπερβαίνει την c και επειδή η ταχύτητα του graviton v_g θα καθορίζει και την ταχύτητα διαδόσεως του πεδίου βαρύτητας, θα έχω: $v_g = c$ (Αυτό προκύπτει από την σχέση ότι: αν η πηγή του πεδίου μετακινείται στο χώρο με ταχύτητα v τότε οι ισοδυναμικές διαφάνειες του πεδίου για το ίδιο το σώμα – πηγή μετακινούνται μαζί του με την ίδια ταχύτητα αλλά για ακίνητο παρατηρητή παραμορφώνονται κατά την διεύθυνση της ταχύτητας).

Ακόμα πρέπει να θέσω $\theta = 0$ γιατί ο μη στατικός χαρακτήρας της μετρικής θα έχει την κατεύθυνση διαδόσεως του gravitation. Τότε: έχω την έκφραση

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{\sqrt{g_{oo}}} + g \quad (4\alpha.25)$$

για την ταχύτητά του όπως την μετρά το ίδιο το σωματίο-πεδίο. Επειδή $g \geq 0$
 $g \leq 1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{g_{oo}}} \geq 1$ έπεται εύκολα $\frac{v}{c} \geq 1$ για το ίδιο το gravitation, ενώ
 αντικαθιστώντας την (4α.25) στην (4α.23) έχω:

$$\begin{aligned} v_\phi &= \frac{c\sqrt{g_{oo}}}{\sqrt{\frac{1}{g_{oo}} + g^2 + \frac{2g}{\sqrt{g_{oo}}} + g + \sqrt{g_{oo}}g^2}} \rightarrow \\ v_\phi &= \frac{cg_{oo}}{\sqrt{(1 + \sqrt{g_{oo}}g)(1 + \sqrt{g_{oo}}g + g_{oo}g)}} \end{aligned} \quad (4α.26)$$

με το σύστημα (4α.25) (4α.26) η μετρική καθορίζεται συναρτήσει των v και $v\phi$ του graviton.

Αντικαθιστώντας δε και στο ds^2 έχω:

$$ds^2 = \left[g_{oo} - (1 + \sqrt{g_{oo}}g)^2 \right] [dx^{o2} - 2g_\alpha dx^\alpha dx^o + g_\alpha g_\beta dx^\alpha dx^\beta] \quad (4α.27)$$

που μου δίνει για την καθαρά τρισδιάστατη μετρική $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{o\alpha}g_{o\beta}}{g_{oo}}$ την
 μορφή από το

$$\begin{aligned} d\ell^2 &= \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \rightarrow \gamma_{\alpha\beta} = (1 + \sqrt{g_{oo}}g)^2 \left[\frac{dx^o}{dx^\alpha} \frac{dx^o}{dx^\beta} - g_\gamma \left(\frac{dx^\gamma}{dx^\alpha} \frac{dx^o}{dx^\beta} + \frac{dx^\gamma}{dx^\beta} \frac{dx^o}{dx^\alpha} \right) + g_\alpha g_\beta \right] \\ \text{ή} \quad \gamma_{\alpha\beta} &= (1 + \sqrt{g_{oo}}g)^2 \left[\frac{1}{n^\alpha n^\beta} - g_\gamma \left(\frac{n^\gamma}{n^\alpha n^\beta} + \frac{n^\gamma}{n^\beta} \frac{1}{n^\alpha} \right) + g_\alpha g_\beta \right] \\ \text{ή} \quad \gamma_{\alpha\beta} &= (1 + \sqrt{g_{oo}}g)^2 \left[\frac{1}{n^\alpha n^\beta} - 2 \frac{g_\gamma n^\gamma}{n^\alpha n^\beta} + g_\alpha g_\beta \right] \end{aligned} \quad (4α.28)$$

όπου n^α το μοναδιαίο εφαπτομενικό $\gamma_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{d\ell}$ της ταχύτητας του graviton κατά
 την διεύθυνση α στον τρισδιάστατο χώρο (α της συντεταγμένης-καμπύλης x^α).

Είναι φανερό στην (4α.28) ότι μηδενισμός της v του graviton δίνει
 $v=0 \rightarrow v\phi=\infty$ και $\gamma_{\alpha\beta}=0$ δηλαδή τότε έχω $d\ell=0$ οπότε $ds=c d\tau$ δηλαδή ο
 proper time συμπίπτει με το ds που σημαίνει ότι ο χώρος έγινε Ευκλείδειος
 αφού μπορώ να μετρήσω τον proper time πάνω στη γεωδαισική s (τοπικά)
 δηλαδή το σύστημα που κινείται με το graviton είναι εκείνο με μετρική

$$ds^2 = g_{o\alpha} dx^o + 2g_{o\alpha} dx^o dx^\alpha + \frac{g_{o\alpha}g_{o\alpha}}{g_{oo}} dx^\alpha dx^\beta$$

(ο τρόπος που μετρά τα πράγματα το ίδιο το graviton) παρατηρώ ότι η
 συνθήκη $v=0$ κάνει το

$$|\bar{g}| = -\frac{1}{\sqrt{g_{oo}}} < 0 \quad \bar{g} = g_{\alpha} \vec{\nabla} x^{\alpha} \quad d_{\alpha} = -\frac{g_{o\alpha}}{g_{oo}}$$

απ' όπου έπεται ότι $\sqrt{g_{\alpha} g^{\alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{g_{oo}}} < 0$ δηλαδή το ίδιο το άνυσμα φανταστικό που σημαίνει ότι τα $g_{o\alpha}$ είναι φανταστικά δηλαδή τα γινόμενά τους < 0 ή αναλυτικά θέτω: $g_{o\alpha} = -if_{\alpha} g_{oo}$ όπου $g_{o\alpha} = -if_{\alpha}$ με f_{α} πραγματικό άρα η μετρική έγινε:

$$ds^2 = g_{oo} dx^{o2} - 2if_{\alpha} g_{oo} dx^o dx^{\alpha} - g_{oo} f_{\alpha} f_{\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} \quad (4\alpha.29)$$

δηλαδή το ds τότε είναι μιγαδικός αριθμός αλλά η μετρική του 3-διάστατου χώρου είναι κανονικότερη. Το ds είναι τότε: $ds = \sqrt{g_{oo}}(dx^o - if_{\alpha} dx^{\alpha})$ μιγαδικό g_{α} έχει την σημασία ότι δρα μεν στον χώρο αλλά χωρίς αυτό να επηρεάζει την ενέργεια του συστήματος (όπως η μιγαδική αντίσταση που αντιστοιχεί σε πυκνωτή ή πηνίο η οποία δεν παράγει έργο αλλά δρα στη διαμόρφωση των μεγεθών ενός κυκλώματος και στις φάσεις των τάσεων και των ρευμάτων με μια μετατόπιση σ' ένα υποθετικό μιγαδικό επίπεδο).

Η μιγαδική μορφή του ds για το gravitation μας δείχνει ότι το graviton είναι ένα κομμάτι ενεργείας αφού ο χρόνος γι' αυτό είναι πραγματικός αλλά ότι συμπεριφέρεται και σαν σωματίο με υπερφωτεινή ταχύτητα αφού ο χώρος γι' αυτό είναι φανταστικός.

Το ότι στο ds^2 ο μόνος μιγαδικός όρος είναι ο μεικτός όρος χρόνου και χώρου $2if_{\alpha} dx^o dx^{\alpha}$ (από την 4α.29) δείχνει ότι το gravitation δρα στην καμπύλωση του χώρου μέσω μιας φανταστικής προσεγγίσεως χώρου και χρόνου ή πιο απλά καμπυλώνει το διάστημα «ανακατεύοντας» τον χρόνο και τον χώρο στην περιοχή του γι' αυτό και κατά την μέτρηση των πραγμάτων από το ίδιο αυτό το «ανακάτεμα» των x^o και με τα x^{α} δεν γίνεται αντιληπτό και παίρνει τον συντελεστή i της φανταστικής μονάδος στο ds^2 .

Αλλά το graviton αποτελεί ένα ανεξάντλητο μέχρι σήμερα θέμα με οριακές προεκτάσεις που δεν μας διαφωτίζουν περισσότερο στο δικό μας θέαμα εδώ για τις μελανές οπές. Το μόνο που μας αρκεί εδώ είναι ότι αποδείξαμε τον μηδενισμό του χώρου στο σύστημα που κινείται με το graviton και που ο μηδενισμός αυτός μπορεί να αντιστοιχηθεί με την κατάσταση $r=0$ της singularity του χωροχρόνου κατά την κατάρρευση της ύλης προς μια μελανή οπή. Οι αποδείξεις για τόσο οριακές καταστάσεις φυσικά δεν υπάρχουν αλλά η ιστορία του ανθρωπίνου πνεύματος πάνω σ' αυτόν τον πλανήτη μας έχει διδάξει πως αν και η φαντασία και η διαίσθηση σπάνια δίνουν τα σωστά αποτελέσματα όμως δείχνουν πάντα σίγουρα προς τις σωστές κατευθύνσεις.

Ως προς την κίνηση ενός σωματίου υπό την επίδραση του πεδίου μιας μαζικής οπής του Schwarzschild χρησιμοποιούμε πάντα την εξίσωση Hamilton Jacobi:

$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} = m^2 c^2$ όπου S η δράση ($S = -f_{mcds}$) που οδηγεί στις εξισώσεις (4α.9)(4α.10) από την αντικατάσταση και λύση με σταθερή στροφορμή M και ενέργεια E_o (αφού πρόκειται για στατικό πεδίο) έχουμε τις εξισώσεις

$$ct = \frac{E_o}{mc^2} \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left[\left(\frac{E_o}{mc^2}\right)^2 - 1 + \frac{r_g}{r} \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (4\alpha.20)$$

και

$$\phi = \int \frac{Mdr}{r^2 \sqrt{\frac{E_o^2}{c^2} - \left(m^2 c^2 + \frac{M^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}} \quad (4\alpha.31)$$

το ολοκλήρωμα αυτό (4α.31) είναι ένα ελλειπτικό ολοκλήρωμα και Φ η γωνία Φ των κυλινδρικών συντεταγμένων (ρ, Φ, z) όπου $\rho=r$ $z=0$ αφού η πείρα μας έχει διδάξει ότι η κίνηση σ' ένα στατικό πεδίο βαρύτητας γίνεται πάνω σ' ένα επίπεδο.

Από την (4α.30) έχουμε σε διαφορική μορφή:

$$\frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} \frac{dr}{cdt} = \frac{1}{E_o} [E_o^2 - u^2(r)]^{\frac{1}{2}} \quad (4\alpha.32)$$

που

$$\left[\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(1 + \frac{M^2}{m^2 c^2 r^2}\right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4\alpha.33)$$

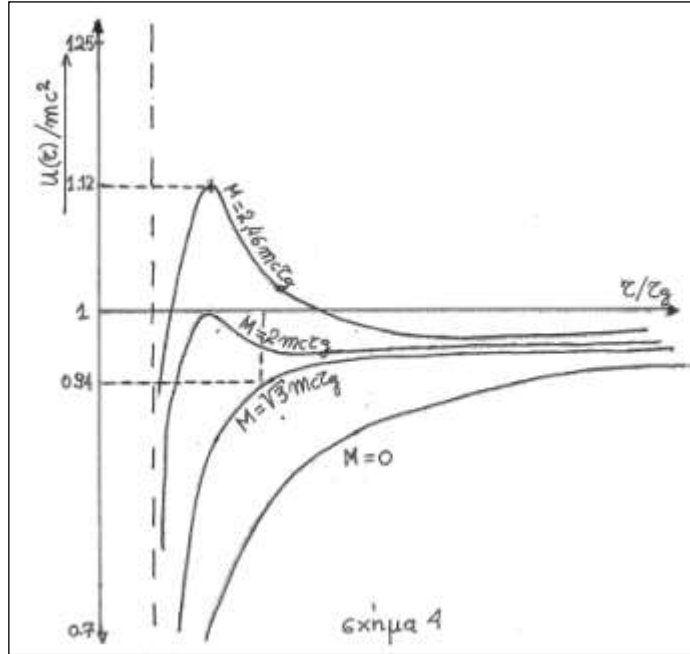
και η $u(r)$ παίζει ένα ρόλο ανάλογο μιας u_{eff} (ενεργού δυναμικής ενεργείας), όπου m' η μάζα του κεντρικού σώματος που δημιουργεί το πεδίο. Βλέπουμε ότι η συνθήκη για να είναι δεκτή μια λύση της (4α.32) είναι: $E_o^2 \geq u^2(r)$. Η καμπυλότητα των τροχιών και οι αντίστοιχες τιμές E_o, M καθορίζεται από τα όρια της $u(r)$ (μέγιστα και ελάχιστα) όπου τα ελάχιστα ($u(r)=\min$) αντιστοιχούν σε σταθερές και τα μέγιστα ($u(r)=\max$) σε ασταθείς τροχιές κυκλικές. Μια στιγμιαία λύση για κυκλικές τροχιές δίνει με $u(r)=E_o$ και $u'(r)=0$ (για να είναι $\frac{dr}{cdt} = 0 \rightarrow r = \text{σταθ.}$).

$$\frac{r}{r_g} = \frac{M^2}{m^2 c^2 r g^2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{3m^2 c^2 r_g^2}{M^2}} \right]$$

$$E_o = M \cdot c \sqrt{\frac{2}{rr_g}} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)$$

όπου το $+$ αντιστοιχεί σε σταθερή και το $-$ σε ασταθή τροχιά κυκλική:

Η πιο κοντινή στο κέντρο κυκλική τροχιά που είναι σταθερή χαρακτηρίζεται από τιμές $r = 3r_g$, $M = \sqrt{3}mcr_g$, $E_o = \sqrt{\frac{8}{9}}mc^2$ ενώ η ελάχιστη ασταθής κυκλική τροχιά σε $r = \frac{3}{2}r_g$ όταν η ενέργεια και η στροφορμή παίρνουν τις οριακές



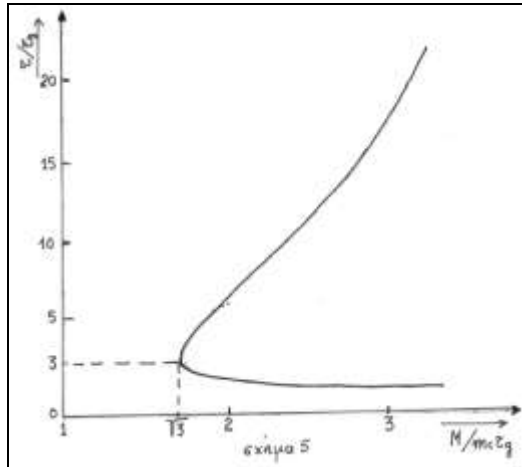
τιμές $M \rightarrow \infty$ $E_o \rightarrow \infty$.

Είναι χρήσιμο να κάνουμε μια προσεγγιστική γραφική παράσταση της μορφής $u(r) = f\left(\frac{r}{r_g}\right)$ για διάφορες τιμές της M όπως και της $\left(\frac{r}{r_g}\right)$ για τιμές της M/mcr_g που αποδεικνύουν τα παραπάνω λεγόμενα περί σταθερών ή όχι τροχιών πάνω σε περιφέρεια κύκλου. Χρησιμοποιούμε πολύ μεγάλη κλίμακα γιατί οι διακυμάνσεις της $u(r)$ βρίσκονται πάρα πολύ κοντά στην τιμή 1 έτσι ώστε να μην φαίνονται καλά για μια φυσιολογικού μεγέθους κλίμακα.

Η κλίμακα αυτή της $u(r)$ έχει το 0 της $u(r)$ 15cm κάτω από το 1 (δηλαδή έξω από την σελίδα και προς τα κάτω) για $r \gg r_g$ ή $\frac{u(r)}{mc^2}$ συγκλίνει προς την τιμή 1.

Στο σχήμα 5 δίνεται $\frac{r}{rg} = f\left(\frac{M}{mcr_g}\right)$ από την εξίσωση

$$\frac{r}{rg} = \left(\frac{M}{mcr_g}\right)^2 \left[1 \pm \sqrt{1 - 3\left(\frac{mcr_g}{M}\right)^2} \right]$$



Το τμήμα της καμπύλης άνω $\left(\frac{r}{r_g} \geq 3, \frac{M}{mcr_g} \geq \sqrt{3} \right)$ αντιστοιχεί στις σταθερές ενώ το κάτω τμήμα $\left(\frac{r}{r_g} \leq 3, \frac{M}{mcr_g} \geq \sqrt{3} \right)$ αντιστοιχεί στις ασταθείς κυκλικές τροχιές.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει να υπολογίσουμε την ενεργό διατομή συλλήψεως βαρυτικής ενός σωματίου από μια μελανή οπή **(α)** μη ρελατιβιστικού **(β)** υπερελατιβιστικού σωματίου που έρχεται από το άπειρο.

(α) για μη ρελατιβιστική ταχύτητα u_∞ σε άπειρη απόσταση η ενέργεια του σωματίου θα είναι $E_o \approx mc^2$. Από την εξίσωση (4α.32) και (4α.33) φαίνεται ότι για την σύλληψη απαιτείται $\frac{dr}{dt} > 0 \left(\frac{dr}{dt} \neq 0 \right)$ δηλαδή

$E_o > u(r) \rightarrow mc^2 > u(r) \rightarrow \frac{u(r)}{mc^2} < 1$. Από το σχήμα 4 φαίνεται ότι για κάθε $M < 2mcr_g$ ικανοποιείται αυτή η σχέση. Τότε $M = m\rho v_\infty$ στο άπειρο και επειδή $M = σταθ \rightarrow m\rho v_\infty < 2mcr_g \rightarrow \rho < 2c \frac{r_g}{v_\infty}$ είναι η ζητούμενη συνθήκη όπου η ρ

είναι η παράμετρος κρούσεως. Για κάθε σωματίο με παράμετρο $\rho < \frac{2cr_g}{v_\infty}$ συμβαίνει σύλληψη του σωματίου από το πεδίο και το σωματίο ασυμπτωτικά φθάνει στην σφαίρα Schwarzschild σε $f \rightarrow \infty$ χωρίς ποτέ να επιστρέψει ξανά στο άπειρο.

Η ενεργός διατομή σκεδάσεως τότε είναι:

$$\sigma = \pi \rho^2 \text{ στο όριο } \rho = 2c \frac{r_g}{v_\infty} \rightarrow \sigma = 4\pi r_g^2 \left(\frac{c}{v_\infty} \right)^2$$

(β) Για υπερελατιβιστικό σωματίο θέτουμε $m \rightarrow 0$ (αφού $v \rightarrow c$) και επειδή τότε $E_o = cP$ όπου P η ορμή τότε έχουμε $M = \sigma \alpha \theta = \rho P$ ($M = \vec{r} \times \vec{P}$)

$E_o = \sigma \alpha \theta \rightarrow P = \sigma \alpha \theta \rightarrow P(r) = P(\infty) \rightarrow \rho = \frac{Mc}{E_o}$ και αντικαθιστώντας στην (4α.32) έχουμε:

$$\frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} \frac{dr}{cdt} = \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} + \frac{\rho^2 r_g}{r^3}}$$

Τα όρια της ακτινικής κινήσεως δίδονται από τις ρίζες της υπορίζου ποσότητας θέτω $\psi = \frac{\rho}{r_g}$ $x = \frac{r}{r_g}$ και έχω την εξίσωση μηδενισμού του υπορίζου

$x^3 - x\psi^2 + \psi^2 = 0$ αναζητώ ελάχιστο δηλαδή $\frac{d\psi}{dx} = 0$ $\frac{d^2\psi}{dx^2} > 0$ λύνω ως προς ψ :

$\psi = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{x-1}}$ η $\frac{d\psi}{dx} = 0$ μου δίνει $x = \frac{3}{2}$ η οποία καθιστά $\frac{d^2\psi}{dx^2} > 0$ και επομένως

είναι δεκτή αντικαθιστώ στην εξίσωση και βρίσκω $\psi\left(\frac{3}{2}\right) = 3\sqrt{\frac{3}{2}} \rightarrow \rho = 3\sqrt{\frac{3}{2}} r_g$

για την τιμή $r = \frac{3}{2} r_g$. Η ρ είναι η παράμετρος σκεδάσεως (συλλήψεως). Για

κάθε $\rho' \leq \rho$ το σωματίο κινείται προς την σφαίρα Schwarzschild ανεπιστρεπτί. Τότε η ενεργός διατομή σκεδάσεως είναι $\sigma = \pi \rho'^2 \rightarrow \sigma = \frac{27}{4} \pi r_g^2$ που είναι καθαρά μικρότερη από την περίπτωση μη σχετικιστικού σωματίου.

Βαρυτική κατάρρευση μη σφαιρικού και περιστρεφόμενου σώματος (Μελανή Οπή Kerr)

Όλα όσα έχουν λεχθεί στις προηγούμενες παραγράφους αφορούν απόλυτα σε σώματα λίγο πολύ σφαιρικά συμμετρικά (έστω αν μπορούν να θεωρηθούν μακροσκοπικά σφαιρικά συμμετρικά). Στην ουσία μικρές αποκλίσεις από την σφαιρική συμμετρία αφήνουν αναλλοίωτη την ποιοτική εικόνα της βαρυτικής καταρρεύσεως (A.G. Doroshkevich, Ya.B. Zeldovich και I.D. Novikov, 1965).

Ας θεωρήσουμε πρώτα αποκλίσεις από την σφαιρική συμμετρία οφειλόμενες στην κατανομή της μάζας και όχι σε περιστροφή του σώματος σαν σύνολο.

Είναι φανερό ότι αν ένα μαζικό κεντρικά συμμετρικό σώμα είναι βαρυτικά ασταθές η αστάθεια του παραμένει για μικρές αποκλίσεις από την σφαιρική

συμμετρία ώστε το σώμα σίγουρα να καταρρεύσει. Χειριζόμενοι την ασθενή απόκλιση από τη σφαιρική συμμετρία σαν μια διαταραχή μπορούμε στο σύστημα που κινείται με την ύλη να ακολουθήσουμε την πορεία της κατά τη διάρκεια της καταρρεύσεως του σώματος.

Οι διαταραχές γενικά είναι γνωστό ότι αυξάνουν αυξανόμενης της πυκνότητας του σώματος. Αλλά αν είναι αρκετά ασθενικές στην έναρξη της καταρρεύσεως θα παραμένουν μικρές μέχρι την στιγμή που το σώμα θα φθάσει στην βαρυτική του ακτίνα. Στις προηγούμενες παραγράφους δείξαμε ότι η εσωτερική δυναμική του σώματος δεν είναι καθόλου ιδιαίτερη την στιγμή αυτή και η πυκνότητά του είναι ακόμα πεπερασμένη. Και επειδή οι εσωτερικές διαταραχές είναι μικρές έπεται ότι και το εξωτερικό βαρυτικό του πεδίο υφίσταται επίσης μικρές διαταραχές δηλαδή ο «ορίζων των γεγονότων», η σφαίρα Schwarzschild, επίσης παραμένει σχεδόν αμετάβλητη και τίποτα δεν εμποδίζει το σώμα να καταρρεύσει πέρα απ' αυτήν (στο σύστημα που κινείται με την καταρρέουσα ύλη). Καμιά πληροφορία όμως δεν φτάνει στον εξωτερικό παρατηρητή για το τι συμβαίνει με τις διαταραχές στο εσωτερικό του σώματος που έχει περάσει την ακτίνα Schwarzschild αφού κανένα σώμα δεν φεύγει προς τα έξω του ορίζοντος των γεγονότων, και η όλη εικόνα παραμένει «επ' άπειρον» να καθυστερεί για τον μακρινό παρατηρητή ($r \rightarrow r_g, t \rightarrow \infty$). Αυτό οδηγεί στο ότι για το εξωτερικό σύστημα αναφοράς το πεδίο βαρύτητας του καταρρέοντος σώματος θα τείνει να γίνει σχεδόν στατικό καθώς το σώμα πλησιάζει την ακτίνα βαρύτητας του ασυμπτωτικά (για το εξωτερικό σύστημα). Ο χαρακτηριστικός χρόνος της προσεγγίσεως αυτής

στην r_g είναι μικρός $\sim r_g/c$ και κατά την διάρκειά του μπορούμε να θεωρήσουμε ότι στην έξω του σώματος χώρο υπάρχουν μόνο εκείνες οι διαταραχές ϕ που δημιουργήθηκαν προηγουμένως στο κεντρικό συμμετρικό πεδίο. Αλλά όλες οι διαταραχές στην πάροδο του χρόνου θα διαδοθούν στον χώρο σαν κύματα βαρύτητας, προς το άπειρο ή περνώντας τον ορίζοντα των γεγονότων. Ανεξάρτητες του χρόνου στατικές διαταραχές λοιπόν δεν μπορούν να παραμείνουν στο εξωτερικό πεδίο βαρύτητας μιας μελανής οπής που σχηματίζεται. Αυτό το ίδιο συμπέρασμα μπορεί επίσης να αποδειχθεί με μια ανάλυση σταθερών διαταραχών στην σφαίρα του Schwarzschild στο κενό. Μια τέτοια ανάλυση δείχνει πως στην στατική περίπτωση κάθε διαταραχή (που μηδενίζεται στο άπειρο) αυξάνει χωρίς όριο καθώς πλησιάζουμε την σφαίρα Schwarzschild του «αδιατάρακτου» προβλήματος αλλά για την παρούσα περίπτωση που εξετάζουμε δεν υπάρχει λόγος εμφανίσεως τόσο μεγάλων διαταραχών του εξωτερικού πεδίου.

Οι αποκλίσεις από την σφαιρική συμμετρία του σώματος και οι ασυμμετρίες της κατανομής της πυκνότητας του περιγράφονται με τετραπολικές ή

ανωτέρας τάξεως συνιστώσες ροπών και κάθε μια τους δίνει την δική τους συνιστώσα στο εξωτερικό πεδίο βαρύτητας. Ο ισχυρισμός μας σημαίνει ότι κάθε τέτοια διαταραχή του εξωτερικού πεδίου αποσβήνεται στα τελικά στάδια (για τον εξωτερικό παρατηρητή) της καταρρεύσεως [γι' αυτόν τον νόμο αποσβέσεως υπάρχει ειδική εργασία του R. H. Price στο Phys. Rev. D. 5,2419,2439(1972) όπου αναφέρεται χαρακτηριστικά ότι οι αρχικά στατικές διπολικής ροπής διαταραχές του εξωτερικού πεδίου υφίστανται απόσβεση με τον νόμο $\sim \frac{1}{t^4}$ και κάθε 2η-πολική ροπή με τον νόμο $\sim \frac{1}{t^{2n+2}}$ όπου t ο χρόνος].

Έτσι η δομή του πεδίου της μελανής οπής παραμένει η δομή του κεντρικού συμμετρικού πεδίου Schwarzschild οριζόμενη μόνο από την ολική της μάζα. Η ερώτηση βέβαια γύρω από το απώτερο μέλλον του σώματος κατά την κατάρρευσή του προς $r < r_g$ (που δεν είναι δυνατόν να παρατηρηθεί από τον εξωτερικό παρατηρητή) στην περίπτωση αυτών των διαταραχών δεν είναι απόλυτα καθορισμένη. Γιαί εδώ κανείς θα μπορούσε να ισχυρισθεί ότι ναι μεν το σώμα καταρρέει προς μια πραγματική ανωμαλία της χωροχρονικής μετρικής αλλά ενός εντελώς διαφορετικού τύπου από την κεντρικά συμμετρική περίπτωση.

Αλλά αυτή η ερώτηση δεν τίθεται προς τον παρόν πλήρως.

Ας επιστρέψουμε στην αρχική μας διερεύνηση κι ας εξετάσουμε ένα άλλο σκέλος της δηλαδή την απόκλιση από την σφαιρική συμμετρία όχι λόγω ασυμμετρίας κατανομής πυκνότητας αλλά λόγω περιστροφής του σώματος σαν σύνολο. Η διατήρηση της στροφορμής σ' ένα πεδίο βαρύτητας (της ολικής στροφορμής του συστήματος ύλη+πεδίο βαρύτητας) μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το πεδίο μιας μελανής οπής δεν εξαρτάται μόνο από την μάζα της αλλά και από την περιστροφή της. Τότε η μετρική θα πρέπει να υφίσταται μια διαταραχή (η στατική μετρική του Schwarzschild) που θα συνίσταται σε όρους μή ανήκοντες στα διαγώνια στοιχεία του πίνακα του μετρικού τανυστή g_{ik} και για μικρή περιστροφή (αργά περιστρεφόμενο σώμα)

θα έχει την μορφή $g_{\phi\phi} = \frac{2kM}{r} \sin^2 \theta$ σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες

$x^0 = ct$ $x^1 = r$ $x^2 = \theta$ $x^3 = \phi$ και M η ολική στροφορμή και μηδενισμός του $M(M=0)$ θα οδηγεί πάλι στην μετρική Schwarzschild.

Η σχέση

$$g_{\phi\phi} = \frac{2kM}{r} \sin^2 \theta \quad (4\beta.1)$$

θα δείξουμε παρακάτω ότι αποτελεί πράγματι το αντιπροσωπευτικό στοιχείο της μετρικής του Kerr.

Το ds^2 στην περίπτωση του περιστρεφόμενου μη σφαιρικού σώματος δόθηκε αρχικά από τον Kerr στο 1963 και στα 1967 τελειοποιήθηκε από τους R.H. Boyer και R.W. Lindquist στη μορφή:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g r}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \left(r^2 + \alpha^2 + \frac{r_g r \alpha^2}{\rho} \sin^2 \theta\right) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{2r_g r \alpha}{\rho^2} \sin^2 \theta d\phi dt \quad (4\beta.2)$$

(όπου σε όλο αυτό το τμήμα θεωρούνται οι σταθερές $c=1$ $k=1$ η σταθερά της βαρύτητας) και:

$$r_g = \frac{2mk}{c^2} \quad (\text{με } k=1 \quad c=1) \quad r_g = 2m$$

m = η μάζα του σώματος (ολική μάζα)

και η σταθερά α βρίσκεται από την προσέγγιση των g_{00}, g_{03} για μεγάλα r :

$$g_{00} \simeq \frac{r_g \alpha}{r} \sin^2 \theta \quad \text{με μια σύγκριση με την (4}\beta.1) \text{ φαίνεται αμέσως ότι } M=ma$$

($M=mac$ για $c \neq 1$) δηλαδή η α είναι η ολική στροφορμή ανά μονάδα μάζης

$$M=ma \quad (4\beta.4)$$

για $\alpha=0$ η μετρική γίνεται μετρική Schwarzschild. Αν θέσω επίσης $t \rightarrow -t$ και $\alpha \rightarrow -\alpha$ η μετρική μένει αναλλοίωτη (ds^2 αναλλεΐωτο) η ορίζουσα του μετρικού τανυστή $g = |(g_{ik})|$ βρίσκεται:

$$g = -\rho^4 \sin^2 \theta \quad (4\beta.5)$$

Για $m=0$ η μετρική γίνεται γαλιλαϊκή

$$ds^2 = dt^2 - \frac{\rho^2}{r^2 + \alpha^2} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - (r^2 + \alpha^2) \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4\beta.6)$$

που είναι η $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ εκπεφρασμένη σε ελλειψοειδείς γεωειδείς συντεταγμένες

$$x = \sqrt{r^2 + \alpha^2} \sin \theta \cos \phi$$

$$y = \sqrt{r^2 + \alpha^2} \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

όπου οι επιφάνειες $r=\text{σταθ.}$ είναι γεωειδής ελλειψοειδής εκ περιστροφής (*oblate ellipsoids of rotation*).

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2 + \alpha^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1$$

Η μετρική (4β.2) έχει μια φανταστική «ανωμαλία» στο $r=r_g$. Αλλά ενώ η μετρική Schwarzschild δίνει $g_{00} \rightarrow 0$ $g_{nn} \rightarrow \infty$ για $r=r_g$ στη μετρική Kerr τα $g_{00} \rightarrow 0$ και $g_{nn} \rightarrow \infty$ διαχωρίζονται σε δύο επιφάνειες.

$g_{00}=0$ συμβαίνει στην επιφάνεια $\rho^2 = r r_g$ ενώ το $g_{11} = \infty$ όταν $\Delta=0$.

Η εξίσωση $\rho^2 = r r_g$ έχει 2 ρίζες που η μεγαλύτερη είναι:

$$r_o = \frac{r_g}{2} + \sqrt{\left(\frac{r_g}{2}\right)^2 - \alpha^2 \cos^2 \theta} \quad (4\beta.7)$$

και δίνει $g_{00}=0$ για $r=r_o$ ενώ η $\Delta=0$ έχει μεγαλύτερη ρίζα την

$$r_{hor} = \frac{r_g}{2} + \sqrt{\left(\frac{r_g}{2}\right)^2 - \alpha^2} \quad (4\beta.8)$$

που δίνει $g_{11} = \infty$ όταν ψ είναι: η $r=r_o$ είναι μια γεωειδής επιφάνεια εκ περιστροφής ενώ η $r=r_{hor}$ μια σφαίρα. Η $r=r_o$ εφάπτεται της r_{hor} στα σημεία $\theta=0$ $\theta=\pi$ και περιέχει την r_{hor} ($r_{hor} \leq r_o$ όπου το ίσον ισχύει για $\theta=0$ $\theta=\pi$):

Η μετρική Kerr από τις εξισώσεις 4β.7-8 φαίνεται ότι δεν ορίζεται (μιγαδικά r_o, r_{hor}) για $\alpha > \frac{r_g}{2}$ που δίνει τις συνθήκες ορίου του α και της στροφορμής $M(=m\alpha)$ σαν:

$$\alpha_{\max} = \frac{r_g}{2}, \quad M_{\max} = \frac{mr_g}{2} \quad (4\beta.9)$$

Που δίνει την μέγιστη στροφορμή μιας μελανής οπής συναρτήσει της μάζας της ($r_g = 2m$ άρα $M_{\max} = m^2$ ή σε συνήθεις μονάδες $M_{\max} = \frac{km^2}{c}$). Η ακριβής ισότητα $\alpha = \alpha_{\max}$ είναι δυνατή και το r_o θα ήταν τότε:

$$r_o = \frac{r_g}{2} (1 + \sin \theta) \quad (4\beta.10)$$

ενώ το r_{hor} :

$$r_{hor} = \frac{r_g}{2} \quad (4\beta.11)$$

Για $\alpha > \frac{r_g}{2}$ η μετρική (4β.2) δείχνει ολοκληρωτικά απαράδεκτες ιδιότητες από φυσική άποψη παραβιάζοντας την αρχή της αιτιότητας με τις συνέπειες να εμφανίζονται κλειστές χρονικές γραμμές που κάνουν δυνατή την πορεία προς το παρελθόν και μετά επάνοδο στο μέλλον. Το ότι αυτές όμως οι ιδιότητες είναι βέβαια απαράδεκτες ως προς την παραβίαση της αιτιότητας δεν τους αφαιρεί τίποτα από την έννοια της δυνατότητας και μάλιστα πολύ γοητευτικής δυνατότητας που ίσως όμως δεν ανήκει ακόμα στο δικό μας αυστηρά αιτιοκρατούμενο παρόντος. Ίσως η αιτιοκρατία και η σχέση

γενικά που συνδέουν το «αίτιο» με το «αιτιατό» να είναι πολύ πιο πλατιές απ' ό,τι μπορούμε να φανταστούμε κι' ίσως η δυσκολία μας απλώς να βρίσκεται στο να «παραδεχθούμε» περισσότερο, παρά στην παραβίαση των φυσικών νόμων. Οι κλειστές χρονικές γραμμές δεν απαγορεύονται από κανένα φυσικό νόμο απλώς βρίσκονται έξω από κάθε, μέχρι τώρα, γνωστή μας κατάσταση του χωροχρόνου. Απλώς οι «ανοιχτές» χρονικές γραμμές παγιώθηκαν μέσα μας σαν απαραβίαστες γιατί απλά δεν μας προσφέρθηκε μέχρι σήμερα τίποτα άλλο εκτός από αυτές. Αν ο χώρος μπορεί να καμπυλωθεί γιατί όχι και ο χρόνος. Η σχετικότητα μας δίνει την ελεύθερη και ισοδύναμη μεταχείριση χώρου και χρόνου. Αν μπορούμε να μετράμε τον χρόνο πάνω σε μια καμπύλη γιατί να μην την μετρήσουμε και πάνω σε μια κλειστή καμπύλη. Το τί θα μετρήσουμε και το πώς θα βλέπουμε τα πράγματα σ' ένα τέτοιο σύστημα δεν είναι θέμα που ανήκει σ' αυτό εδώ το θέμα αλλά δεν παύει να είναι μια πολύ ενδιαφέρουσα δυνατότητα κι ένας δρόμος.

Ας δούμε όμως τί συμβαίνει με τις επιφάνειες $r = r_o, r = r_{hor}$. Το $r = r_{hor}$ είναι η επιφάνεια του ορίζοντος του σώματος και όταν κάτι περάσει απ' αυτόν δεν επιστρέφει προς τα έξω. Είναι ένας μονόδρομος προς το εσωτερικό όπως η σφαίρα Schwarzschild για το στατικό πεδίο.

Γενικά η ιδιότητα της προς μία κατεύθυνση διελεύσεως των κοσμικών γραμμών των κινουμένων σωμάτων ισχύει για κάθε μηδενική υπερεπιφάνεια. Μηδενική είναι μια υπερεπιφάνεια όταν το normal της είναι ένα μηδενικό άνυσμα παντού. Δηλαδή η επιφάνεια $f(x^0, x^1, x^2, x^3) = \text{σταθ.}$ είναι μηδενική όταν το άνυσμα $n_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ ικανοποιεί την σχέση $n_i n^i = 0$ για κάθε σημείο της f .

Αυτό σημαίνει μ' άλλα λόγια ότι το normal της f κείται μέσα στην ίδια την επιφάνεια f κατά μήκος της υπερεπιφανείας $df = n_i dx^i = 0$ και η οποία ικανοποιείται όταν τα n_i, dx^i συμπίπτουν. Αυτό σημαίνει ότι η υπερεπιφάνεια αυτή είναι εφαπτομενική σε κάθε σημείο της του κώνου του φωτός του κάθε σημείου της.

Έτσι οι κώνοι του φωτός βρίσκονται πάντα προς την μία της κατεύθυνση και είναι εφαπτόμενοι στην υπερεπιφάνεια (στο σημείο της που αντιστοιχούν) κατά μία γενετική τους. Έτσι σώματα ή φωτεινές ακτίνες περνούν αυτές τις υπερεπιφάνειες μόνο προς μια κατεύθυνση. Η ιδιότητα αυτών των υπερεπιφανειών είναι τετριμμένη από φυσική άποψη γιατί απλώς δείχνει το αδύνατο υπάρξεως ταχύτητας μεγαλύτερης του φωτός (απλό παράδειγμα τέτοιας υπερεπιφανείας είναι η υπερεπιφάνεια $x-ct=0$ για ένα ευκλείδειο σύστημα). Η μη τετριμμένη περίπτωση από φυσική άποψη μιας τέτοιας υπερεπιφανείας είναι όταν η μηδενική υπερεπιφάνεια δεν εκτείνεται μέχρι το άπειρο του χώρου ώστε τότε οι τομές της με την υπερεπιφάνεια $t=\text{σταθ}$ να

είναι κλειστές επιφάνειες στον χώρο των 3-διαστάσεων. Τέτοιες επιφάνειες είναι ο ορίζων των γεγονότων $r = r_{hor}$ και όπως και η σφαίρα Schwarzschild στην σφαιρικά συμμετρική περίπτωση.

Στην περίπτωση του πεδίου Kerr η εξίσωση $n_i n^i = 0$ και επειδή

$$n_i = \frac{\partial f}{\partial x^i} \rightarrow g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^k} = 0 \text{ για } f(r, \theta) = \text{σταθ. έχει την μορφή}$$

$$g^{11} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 + g^{22} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 = 0 \rightarrow \text{αντικαθιστώντας τα } g^{11}, g^{22} \text{ έχω:}$$

$$\frac{1}{\rho^2} \left[\Delta \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 \right] = 0 \quad (4\beta.12)$$

η (4β.12) δεν ικανοποιείται πάνω στην επιφάνεια $r = r_{hor} = \text{σταθ. όπου } \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0$,

$\Delta = 0$ και η f τότε είναι $f = r$.

Συνέχιση της μετρικής Kerr εσωτερικά του ορίζοντος δεν έχει φυσική σημασία. Μια τέτοια συνέχιση θα εξαρτιόταν μόνο από 2 παραμέτρους m και a όπως και εκτός του ορίζοντος και δεν θα απαντούσε σε καμιά ερώτηση για την τύχη του καταρρέοντος άστρου (σώματος γενικά) αφού περνούσε τον ορίζοντα γιατί τα φαινόμενα της μη σφαιρικότητας δεν αποσβήνονται πλέον όταν βρισκόμαστε στο σύστημα που κινείται με την ύλη που καταρρέει αλλά αντιθέτως αυξάνουν με την κατάρρευση ώστε το πεδίο πέρα από τον ορίζοντα των γεγονότων να μην είναι δυνατόν να ορισθεί μόνο από την μάζα και την στροφορμή του σώματος.

Η περιοχή με τις πιο σημαντικές και ενδιαφέρουσες ιδιότητες όμως είναι το διάστημα μεταξύ της επιφανείας $r = r_{hor} = \text{σταθ. και του ορίζοντος}$ ($r = r_{hor} = \text{σταθ.}$) και λέγεται «εργόσφαιρα» (*ergosphere*).

Η στοιχειώδης ιδιότητα της εργόσφαιρας είναι ότι κανένα σωματίο δεν μπορεί να μείνει γιατί στην περιοχή αυτή με $r, \theta, \phi = \text{σταθερά} \rightarrow ds^2 < 0$ δηλαδή το ds παύει να είναι *timelike* όπως είναι κάθε κοσμική γραμμή ενός σωματίου. Η μεταβλητή t του χρόνου χάνει τον χρονικό της χαρακτήρα. Έτσι ένα στέρεο σύστημα αναφοράς δεν μπορεί να επεκταθεί από το άπειρο στην εργόσφαιρα και έτσι η επιφάνεια $r = r_o = \text{σταθ.}$ μπορεί να λεχθεί «το όριο της στατικότητας».

Ο χαρακτήρας της κινήσεως ενός σωματίου στην εργόσφαιρα είναι βασικά διαφορετικός από εκείνον στο εσωτερικό του ορίζοντα του πεδίου Schwarzschild. Στο πεδίο Schwarzschild μόνο ακτινικές κινήσεις επιτρεπόταν για $r < r_g$ και προς το κέντρο $r = 0$. Στην εργόσφαιρα του πεδίου Kerr συμβαίνει ακριβώς το αντίθετο $\Phi = \text{σταθ.}$ είναι αδύνατο ενώ $r = \text{σταθ.}$ είναι δυνατό για ένα σωματίο και τα σωματία έτσι είναι υποχρεωμένα να

περιστρέφονται γύρω από τον άξονα συμμετρίας του πεδίου. Ακόμα σωμάτια (ή και ακτίνες φωτός) μπορούν να κινηθούν με αύξον ή ελαττούμενο r και να επιστρέψουν από την εργόσφαιρα στον έξω χώρο, όπως και σωμάτια από τον έξω χώρο να μπουν στην εργόσφαιρα. Ο χρόνος για να φθάσει ένα σωματίο σ' οποιοδήποτε σημείο της εργόσφαιρας είναι πεπερασμένος εκτός από τους πόλους ($\theta=0$ $\theta=\pi$) όπου η εργόσφαιρα εφάπτεται με την $r=r_{hor}$ και ο χρόνος είναι άπειρος πάλι φυσικά. Λόγω της υποχρεωτικής περιστροφής στην εργόσφαιρα έχουμε μετρική της μορφής

$$ds^2 = \left(g_{00} - \frac{g_{23}}{g_{33}} \right) dt^2 + g_{11} dr^2 + g_{22} d\theta^2 + g_{33} \left(d\phi + \frac{g_{03}}{g_{33}} dt \right)^2 \quad (4\beta.130)$$

το

$$g_{00} - \frac{g_{23}}{g_{33}} = \frac{\Delta}{r^2 \alpha^2 + r_g r \alpha^2 \sin^2 \theta / \rho^2}$$

είναι παντού θετικό έξω από το $r=r_{hor}$ και δεν μηδέν στο $r=r_o = \sigma \alpha \theta$. Το ds είναι *timelike* και $r=\sigma \alpha \theta$. $\theta=\sigma \alpha \theta$. $d\phi = -\frac{g_{03}}{g_{33}} dt$. Η ποσότητα

$$-\frac{g_{23}}{g_{33}} = \frac{r_g \alpha r}{\rho^2 (r^2 + \alpha^2) + r_g r \alpha^2 \sin^2 \theta} \quad (4\beta.14)$$

παίζει τον ρόλο της γενικευμένης γωνιακής ταχύτητας περιστροφής στην εργόσφαιρα για το εξωτερικό ακίνητο σύστημα και η διεύθυνση περιστροφής ταυτίζεται με την διεύθυνση περιστροφής του κεντρικού σώματος. Η ενέργεια του σωματίου $-\frac{\partial S}{\partial \tau}$ ως προς τον *proper time* είναι πάντα θετική και

$$E_o = P_o = m c u_o = -\frac{\partial S}{\partial t} = m c g_{oi} \frac{dx^i}{ds}, \text{ με } m \text{ την μάζα του σωματίου } u_o \text{ την χρονική}$$

αναλλοίωτη συνιστώσα της γενικευμένης ταχύτητας S την δράση ψ την χρονική αναλλοίωτη συνιστώσα της 4-ορμής, διατηρείται σταθερά αφού το πεδίο είναι ανεξάρτητο του χρόνου.

Η μεταβλητή t είναι γεγονός πως δεν έχει χρονικό χαρακτήρα μέσα στην εργόσφαιρα και καταλήγει στο περίεργο αποτέλεσμα $g_{oo} < 0$ ώστε η

$$E_o = m(g_{oo} u^o + g_{o3} u^3) = m \left(g_{oo} \frac{dt}{ds} + g_{o3} \frac{d\phi}{ds} \right)$$

να μπορεί να είναι αρνητική. Επειδή για το εξωτερικό σύστημα t είναι ο χρόνος E_o δεν μπορεί να είναι αρνητική. Για $E_o < 0$ ένα σώμα δεν μπορεί να πέσει μέσα στην εργόσφαιρα όταν βρίσκεται έξω από αυτήν. Η πιθανότητα που έχει ένα τέτοιο σώμα είναι να σπάσει σε 2 κομμάτια από τα οποία το ένα

να «συλληφθεί» από την εργόσφαιρα σε τροχιά «αρνητικής ενεργείας». Αυτό το κομμάτι του σώματος ποτέ δεν θα βγει πια από την εργόσφαιρα στο έξω διάστημα και τελικά θα φθάσει στον ορίζοντα των γεγονότων $r = r_{hor}$. Αλλά επειδή η E_o είναι μια ποσότητα προσθετική και διατηρήσιμη, το «άλλο κομμάτι» του σώματος θα έχει ενέργεια μεγαλύτερη από την ενέργεια του αρχικού σώματος που «έπιασε» και μπορεί να περάσει την επιφάνεια $r = r_o$ και να επανέλθει στον έξω κόσμο. Η ενέργειά του θα είναι μεγαλύτερη από την ενέργεια του αρχικού σώματος κι' έτσι έχουμε μια απόσπαση ενεργείας από μια μελανή οπή.

Τελικά σημειώνουμε ότι αν και η επιφάνεια $r = r_o$ δεν είναι ανωμαλία για την χωροχρονική μετρική η καθαρά 3-διάστατη μετρική έχει «ανωμαλία» πάνω στην $r = r_o$ στο σύστημα (4β.2) ο 3-διάστατος μετρικός τανυστής του χώρου:

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{o\alpha}g_{o\beta}}{g_{oo}} \text{ όπου είναι: } d\ell^2 = \gamma_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \text{ και υπολογίζεται από την (4β.2)}$$

$$d\ell^2 = \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta + \frac{\Delta \sin^2 \theta}{1 - \frac{r r_g}{\rho^2}} d\phi^2 \quad (4\beta.15)$$

Κοντά στην επιφάνεια $r = r_o$ οι παράλληλοι $\theta = \sigma \tau a \theta$. $r = \sigma \tau a \theta$. τείνουν στο άπειρο με τον νόμο $2\pi \alpha \sin^2 \frac{\theta}{\sqrt{g_{oo}}}$ η διαφορά

$$\Delta t = -\phi \frac{g_{o3}}{g_{oo}} d\phi = -\int_o^{2\pi} \frac{g_{o3}}{g_{oo}} d\phi$$

στον χρόνο τείνει στο άπειρο αν τα ρολόγια συγχρονίζονται κατά μήκος αυτής της κλειστής τροχιάς.

Εξετάζοντας την κίνηση στο πεδίο Kerr ενός σωματίου έχουμε από την εξίσωση Hamilton-Jacobi

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^{ik}} = m^2 \text{ και}$$

$$S = -E_o t + L\phi + S_r(r) + S_\theta(\theta) \quad (4\beta.16)$$

διαχωρίζοντας τις μεταβλητές έχουμε:

$$\left(\frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 + \left(\alpha E_o \sin \theta - \frac{L}{\sin \theta} \right)^2 + \alpha^2 m^2 \cos \theta = K$$

$$\left(\frac{dS_r}{dr} \right)^2 \frac{1}{\Delta} [(r^2 + \alpha^2)E_o - \alpha L]^2 + m^2 r^2 = -K \quad (4\beta.17)$$

όπου K αυθαίρετη σταθερά (παράμετρος διαχωρισμού των μεταβλητών) και οι (4β,17) εξισώσεις ολοκληρώνονται εύκολα. Από τον ορισμό της 4-ορμής

$$P_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i} \quad P^k = -g^{ki} \frac{\partial S}{\partial x^i} = m \frac{dx^i}{ds}$$

και από τη λύση των (4β.17) και τον υπολογισμό του δεξιού μέλους της (4β.16) προκύπτει.

$$m \frac{dt}{ds} = -\frac{r_g r_\alpha}{\rho^2 \Delta} L + \frac{E_o}{\Delta} \left(r^2 + \alpha^2 + \frac{r_g r \alpha^2}{\rho^2} \sin^2 \theta \right) \quad (4\beta.18)$$

$$m \frac{d\phi}{ds} = -\frac{r_g r_\alpha}{\rho^2} \left(1 - \frac{r_g r}{\rho^2} \right) + \frac{r_g r \alpha}{\rho^2 \Delta} E_o \quad (4\beta.19)$$

$$m \frac{dr}{ds} = \left\{ \frac{1}{\rho^4} \left[(r^2 + \alpha^2) E_o - \alpha L \right]^2 - \frac{\Delta}{\rho^4} \left[k + m^2 r^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4\beta.20)$$

$$m \frac{d\theta}{ds} = \left\{ \frac{1}{\rho^4} \left[(k - \alpha^2 m^2 \cos^2 \theta) \right] - \frac{1}{\rho^4} \left(\alpha E_o \sin \theta - \frac{L}{\sin \theta} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4\beta.21)$$

Αυτά τα ολοκληρώματα είναι τα πρώτα ολοκληρώματα των γεωδαισιακών εξισώσεων. Ενώ η ολοκλήρωση των (4β.18)-(4β.21) δίνει τις τροχιές και την χρονική εξάρτηση των συντεταγμένων. Ομοίως η χρονική εξάρτηση και οι τροχιές μπορούν να υπολογισθούν από τα $\frac{\partial S}{\partial E_o} = \sigma \alpha \theta$, $\frac{\partial S}{\partial L} = \sigma \alpha \theta$, $\frac{\partial S}{\partial K} = \sigma \alpha \theta$.

Οι εξισώσεις (4β. 19-21) επιτρέπουν ακτινική κίνηση μόνο κατά μήκος του άξονα περιστροφής του κεντρικού σώματος (καθαρά ακτινική) με $\theta = \sigma \alpha \theta$, $\phi = \sigma \alpha \theta$. Ενώ καθαρή περιστροφή ($r = \sigma \alpha \theta$) είναι δυνατή μόνο στο ισημερινό επίπεδο του κεντρικού σώματος. Κυκλικές τροχιές καθαρά, περιγράφονται μόνο για $\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{d\theta}{ds} = 0$ και έχουμε τότε τις εξισώσεις της καθαρά κυκλικής κινήσεως στο ισημερινό επίπεδο του κεντρικού σώματος:

$$m \frac{dt}{ds} = -\frac{r_g \alpha}{r \Delta} L + \frac{E_o}{\Delta} \left(r^2 + \alpha^2 + \frac{r_g \alpha^2}{r} \right) \quad (4\beta.22)$$

$$m \frac{d\phi}{ds} = -\frac{M}{\Delta} \left(1 - \frac{r_g r}{r} \right) + \frac{r_g \alpha}{r \Delta} E_o \quad (4\beta.23)$$

$$m \frac{dr}{ds} = \sqrt{\left[\frac{1}{r^4} \left\{ (r^2 + \alpha^2) E_o - \alpha L \right\}^2 - \frac{\Delta}{r^4} \left\{ (\alpha E_o - L)^2 + m^2 r^2 \right\} \right]} \quad (4\beta.24)$$

Μπορούμε ακόμα να υπολογίσουμε τις πλησιέστερες στο κέντρο τροχιές πάνω σε περιφέρεια κύκλου όταν η μελανή οπή έχει μεγίστη περιστροφή $\alpha \rightarrow \frac{r_g}{2}$ στο οριακό πεδίο Kerr.

Η ενεργός δυναμική ενέργεια υπολογίζεται από την σχέση $[(r^2 + \alpha^2)u(r) - \alpha L]^2 - \Delta[(\alpha u(r) - L)^2 + r^2 m^2] = 0$ για $u(r) = E_o$ το δεξιό μέλος της (4β.24) μηδενίζεται και η $u(r) = \min$ με τις στιγμιαίες λύσεις $u(r) = E_o$, $\frac{du(r)}{dr} = 0$ $\frac{d^2 u(r)}{dr^2} > 0$ μου δίνουν τις σταθερές τροχιές ενώ η $\frac{d^2 u(r)}{dr^2} = 0$ αντιστοιχεί στην πλησιέστερη στο κέντρο τροχιά. Για $r < r_{\min}$ η $U(r)$ δεν έχει ελάχιστα. Υπολογίζουμε τις παραμέτρους της κινήσεως **α)** $L < 0$ (περιστροφή αντίρροπη προς την περιστροφή της μελανής οπής).

$$r_{\min} = \frac{q}{2} r_g, E_o = \frac{5m}{3\sqrt{3}}, L = \frac{11mr_g}{3\sqrt{3}}$$

β) $L > 0$ (περιστροφή του σωματίου ομόρροπη προς την περιστροφή της μελανής οπής)

$$\alpha \rightarrow \frac{r_g}{2} \quad r_{\min} \rightarrow r_{hor} \text{ και θέτοντας}$$

$$\alpha \rightarrow \frac{r_g}{2} (1 + \delta) \text{ με } \delta \rightarrow 0$$

$$\text{έχω: } r_{hor} = \frac{r_g}{2} (1 + \sqrt{2\delta})$$

$$r_{\min} = \frac{r_g}{2} [1 + (4\delta)^{1/3}]$$

$$E_o = \frac{L}{r_g} = \frac{m}{\sqrt{3}} [1 + (4\delta)^{1/3}]$$

$$\text{το } r_{\min} \rightarrow \frac{r_g}{2} \text{ αναλόγως του } 2^{2/3} \delta^{1/3} \text{ με } \delta \rightarrow 0$$

$$r_{\min} \rightarrow \frac{r_g}{2} \text{ αναλόγως του } 2^{1/2} \delta^{1/2} \text{ με } \delta \rightarrow 0$$

δηλαδή η r_{hor} πριν η r_{hor} να φθάσει την $\frac{r_g}{2}$ γιατί η $r_{\min} \rightarrow \frac{r_g}{2}$ αργότερα από την r_{hor} .

Παρατηρούμε δηλαδή ότι $\frac{r_{\min}}{r_{hor}}$ παραμένει > 1 δηλαδή η τροχιά δεν εφάπτεται στον ορίζοντα ποτέ. Αυτό είναι φυσικό γιατί ο ορίζων είναι μηδενική υπερεπιφάνεια και δεν μπορούν *time-like* κοσμικές γραμμές κινουμένων σωματίων να βρίσκονται πάνω σε μια μηδενική επιφάνεια.

Η ανωτέρω εκτεθείσα μορφή των μελανών οπών που προκύπτουν από την κατάρρευση περιστρεφόμενων και μή σφαιρικών σωμάτων καθώς και άλλες μορφές που προκύπτουν από πολυπλοκότερες μορφές καταρρεύσεως, που εξετάζουμε στα επόμενα, λόγω του ιδιαιτέρου χαρακτηριστικού να μπορούν σήματα να διαφύγουν από ορισμένες περιοχές τους και κάτω από τις

απαραίτητες συνθήκες (όπως σ' αυτήν την περίπτωση για $r_o \leq r < r_{hor}$ και με ενέργεια αρνητική του σωματίου) έχουν την χαρακτηριστική ονομασία «*γυμνές ανωμαλίες*» ακριβώς γιατί κάποιος ακίνητος μακρινός παρατηρητής μπορεί να πάρει μ' αυτόν τον τρόπο πληροφορίες για την «*ανώμαλη*» περιοχή του χωροχρόνου στο εσωτερικό τους. Στα επόμενα εξετάζουμε τις περιπτώσεις μελανών οπών που προκύπτουν από την γενικευμένη θεωρία βαρύτητας – ηλεκτρομαγνητισμού που περιγράφεται με τις ενοποιημένες εξισώσεις πεδίου Maxwell – Einstein και που περιλαμβάνουν σαν υποπεριπτώσεις τις γενικές μορφές λύσεων Reissner – Nordström και Kerr – Newman ασυμπτωτικά.

Βαρυτική κατάρρευση σφαιρικά συμμετρικού και φορτισμένου σώματος

Στην θεωρία βαρύτητας του Einstein οι εξισώσεις πεδίου που καθορίζουν τον συμμετρικό τανυστή g_{ik} και το ηλεκτρομαγνητικό άνυσμα Ψ_i είναι:

$$G^{ij} = 8\pi(T^{ij} + T_{(u)}^{ij}) \text{ και } F^{ij}; j = 4\pi J^i \quad (4\gamma.1)$$

όπου G^{ij} ο συνολικός τανυστής κινητικής ενεργείας ύλης και φορτίου, F^{ij} ο τανυστής του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, $T_{(u)}^{ij}$ – όπου (u) δεν είναι δείκτης αλλά χρησιμοποιείται για να διαχωρίσει τον $T_{(u)}^{ij}$ από τον T^{ij} – είναι ο τανυστής κινητικής ενεργείας της ύλης και του βαρυτικού πεδίου, T^{ij} ο τανυστής κινητικής ενεργείας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, J^i το 4-άνυσμα ρεύματος (πυκνότητας ρεύματος) και :

$$F_{ik} \equiv \Psi_{k;j} - \Psi_{i;k}$$

και

$$T^{ij} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{ik} F_{,k}^j - \frac{1}{4} g^{ij} F^{\ell m} F_{\ell m} \right) \quad (4\gamma.2)$$

(Επειδή η ύλη φέρει και το φορτίο ο $T_{(u)}^{ij}$ μπορεί να θεωρηθεί ο τανυστής κινητικής ενεργείας των πηγών γενικά).

Οι παραπάνω εξισώσεις του πεδίου αυτές μπορούν να έχουν και μια πιο γενικευμένη όψη (Horndeski 1977) την εξής:

$$\lambda G^{ij} + \mu g^{ij} = 8\pi(xT^{ij} + kA^{ij}) + 8\pi T_{(u)}^{ij} \quad (4\gamma.3)$$

$$xF^{ij};j + \frac{1}{2} k F_{\ell m;n}^* R^{*in\ell m} = 4J^i \quad (4\gamma.4)$$

όπου λ, μ, x, k σταθερές και:

$$A^{ij} \equiv \frac{1}{8\pi} (F_{mn} F_{,\ell}^{n*} R^{*imj\ell} + F^{*im;n} F_{,n;m}^{*j}) \quad (4\gamma.5)$$

όπου με αστερίσκο συμβολίζουμε τον δυαδικό τανυστή κάποιου τανυστή δηλ.

$R^{*iklm} = \frac{1}{2} E^{ikpr} R_{pr}^{\ell m}$ και $F^{*ik} = \frac{1}{2} E^{ik\ell m} F_{\ell m}$ όπου $E^{ik\ell m}$ ο μοναδιαίος αντισυμμετρικός

τανυστής τάξεως 4 που ορίζεται $E^{ik\ell m} = \frac{1}{\sqrt{-g}} e^{ik\ell m}$, $E_{ik\ell m} = \sqrt{-g} e_{ik\ell m}$ όπου $e^{ik\ell m}$ τα

πλήρως αντισυμμετρικά σύμβολα τάξεως 4. Και για να δίνει η μεν εξίσωση (4γ.3) τις εξισώσεις Einstein σε απουσία ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και η εξίσωση (4γ.4) τις εξισώσεις Maxwell σε ευκλείδειο χώρο δεχόμαστε $\lambda=1$, $\mu=0$, $\chi=1$.

Θεωρώντας το μήκος τόξου ds στον χώρο $R \times R^3$ όπου r, θ, ϕ σφαιρικές συντεταγμένες στον R^3 και t η συντεταγμένη του R έχουμε:

$$ds^2 = -\omega^0 \otimes \omega^0 + \omega^1 \otimes \omega^1 + \omega^2 \otimes \omega^2 + \omega^3 \otimes \omega^3 \quad (4\gamma.7)$$

όπου F είναι το αντίστοιχο άνυσμα που εκφράζει τον F^{ik} στις διαστάσεις ($\vec{F} = \vec{\varepsilon} + i\vec{H}$ με i την φανταστική μονάδα $\vec{\varepsilon}$ η ένταση του ηλεκτρικού και $\vec{H}$ η ένταση του μαγνητικού πεδίου) και $\omega^0 \equiv e^a dt$, $\omega^1 \equiv e^b dr$, $\omega^2 \equiv r d\theta$, $\omega^3 \equiv r \sin \theta d\phi$ και a, b, f συναρτήσεις μόνο του r αν εξετάζουμε την στατική περίπτωση ή των r, t αν εξετάζουμε την μη στατική περίπτωση του σφαιρικά (κεντρικά) συμμετρικού γενικευμένου πεδίου.

Προτού προχωρήσουμε σε εξισώσεις για τα a, b, f πρέπει να πούμε ότι όπως από την αρχή φαίνεται ένα σώμα ανεξάρτητα του αν είναι σφαιρικό ή όχι ή των άλλων του ιδιοτήτων είναι γνωστό ότι δεν μπορεί να είναι φορτισμένο μακροσκοπικά παρά μόνο με ένα είδος (+ ή -) φορτίου γιατί απλούστατα τα αντίθετα φορτία αλληλοεξουδετερώνονται σ' αυτό. Δηλαδή η περίπτωση που εξετάζουμε αφορά σε μια μελανή οπή τύπου Schwarzschild η οποία όμως έχει μια περίσσεια + ή - φορτίου. Τα φορτία φέρονται αποκλειστικά από την ύλη, αυτό όμως έχει σαν συνέπεια ότι εφ' όσον το φορτίο της ύλης (η περίσσεια του φορτίου ακριβέστερα) αποτελείται από φορτία ομόσημα (στοιχειώδη φορτία) είναι φυσικό αποτέλεσμα αυτά να απωθούνται και επομένως να δρουν αντίθετα προς τις δυνάμεις βαρύτητας που έλκουν την ύλη προς το κέντρο και μάλιστα με την πάροδο του χρόνου όσο, λόγω της καταρρεύσεως, η πυκνότητα της ύλης αυξάνει τα φορτία να έρχονται πιο κοντά μεταξύ τους με αποτέλεσμα οι απωστικές δυνάμεις να αυξάνουν όσο η ακτίς του σώματος θα μικραίνει. Φυσικά η κατάρρευση δεν μπορεί να σταματήσει πλέον και η βαρύτητα σταθερά έλκει την ύλη προς την singularity της μετρικής και εν συνεχεία ακόμη πιο πέρα προς την πραγματική «ανωμαλία» του χωροχρόνου $r=0$. Όμως τα φορτία δεν είναι δυνατόν να καταστραφούν (τουλάχιστον με τα μέχρι τώρα γνωστά) και μια παρατήρηση ακόμα και των κλασσικών τύπων μας αποδεικνύει ότι επειδή το δυναμικό είναι $\sim \frac{1}{r}$ τουλάχιστον και η δύναμη

Coulomb τουλάχιστον $\sim \frac{1}{r^2}$ όταν το $r \rightarrow 0$ οι δυνάμεις Coulomb και γενικότερα η απωστική δύναμη μεταξύ των φορτίων τείνει στο ∞ αναλόγως

του τετραγώνου της μεταξύ των φορτίων αποστάσεως τουλάχιστον ενώ η κίνηση των φορτίων αναπόφευκτα δημιουργεί μαγνητικά πεδία που τείνουν να δημιουργήσουν μια στροβιλότητα στην κίνηση των φορτίων και μάλιστα στις μεγάλες ταχύτητες που αναπτύσσονται στην κατάρρευση περιμένουμε και τα μαγνητικά αυτά πεδία να είναι ένας τουλάχιστον υπολογίσιμος παράγοντας αμέσως μετά τις ηλεκτρικές απωστικές δυνάμεις και ακόμα και στην καθαρά ακτινική κίνηση προς το κέντρο της ιδανικής περιπτώσεως καταρρεύσεως άνευ τριβών το μαγνητικό πεδίο δεν μπορεί να είναι παντού μηδέν και θα τείνει να δημιουργήσει στροβίλους καθέτους στην ακτινική απόσταση από το κέντρο παίζοντας αν όχι καθοριστικό όμως έναν ρόλο ενισχυτικό για τις απωστικές δυνάμεις μεταξύ των φορτίων.

Έτσι περιμένουμε εξ' αρχής «διαταραχή» της μετρικής που επάγεται από το καθαρό πεδίο βαρύτητας. Η ερώτηση είναι πόσο ισχυρή θα είναι αυτή η «διαταραχή» της μετρικής που πρέπει να περιμένουμε. Κάνουμε μια σύγκριση με την προηγούμενη παράγραφο 4β όπου αντιμετωπίσαμε την «διαταραχή» από την περιστροφή ξεκινώντας από τον συσχετισμό δυνάμεων. Ξέρουμε ότι η ηλεκτρομαγνητική δύναμη χονδρικά είναι 10^{39} φορές ισχυρότερο της δυνάμεως βαρύτητας και κρίνονται από το βεληνεκές των δυνάμεων Coriolis της περιστροφής και των φυγοκέντρων οι μεν δυνάμεις Coriolis είναι αμελητέες για αποστάσεις πέραν του $\frac{c}{\Omega}$ όπου C η ταχύτης του

φωτός Ω η γωνιακή ταχύτης περιστροφής, ενώ οι φυγόκεντρες τείνουν στο 0 όταν $r \rightarrow 0$ και τείνουν στο ∞ όταν $r \rightarrow \infty$ οπότε μόνο δυνάμεις Coriolis παίζουν σημαντικό ρόλο στα τελευταία στάδια μιας καταρρεύσεως και η ισχύς τους ακόμα και για μεγίστη περιστροφή ήταν $M \rightarrow \frac{mcr_g}{2} \Rightarrow \Omega \rightarrow \frac{c}{2r_g}$

γίνεται ίση περίπου με τις βαρύτητες δηλαδή 10^{39} της ηλεκτρομαγνητικής. Αν λοιπόν η περιστροφή δημιουργεί μια «διαταραχή» ορισμένη στη μετρική (διαχωρισμός σε 2 ορίζοντες δημιουργία της «γυμνής ανωμαλίας» Kerr) τότε τί θα πρέπει να δημιουργεί μια δύναμη «διαταρακτική» 10^{39} φορές ισχυρότερη; Μια πρώτη απάντηση δόθηκε από τους Reissner-Nordström με

την ύπαρξη μιας σφαίρας με ακτίνα $r = \sqrt{kQ}$ όπου k σταθερά ($= \frac{hG}{c^3 e} h = \frac{h}{2\pi}$ με

h σταθερά Planck, G η σταθερά βαρύτητος, e το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο c η ταχύτης του φωτός) και Q το φορτίο της μελανής οπής και η οποία σφαίρα «καλύπτει» την πραγματική «ανωμαλία» του πεδίου στο $r=0$ και την ύπαρξη 2 ανωμαλιών της μετρικής στα $r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - 4\pi Q^2}$ m η μάζα Q το φορτίο. Μια ολοκληρωμένη απάντηση είχε δοθεί πολυ πιο πριν ήδη από τον H. Heyl στα 1918: Ο χώρος δεν είναι πια Riemann – χώρος, είναι ένας χώρος Weyl. Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο ανατρέπει την συμμετρία του μετρικού

τανυστή και των συμβόλων του Christorffel (συνέπεια του ασυμμέτρου g_{ik}). Τελευταίες εργασίες των Hondeski, Kunsatter, Moffat στα 1977 περιλαμβάνουν ακριβώς αυτόν τον χειρισμό του γενικευμένου πεδίου Maxell-Einstein στη περίπτωση σφαιρικής συμμετρίας και ανάλογες εργασίες των C. Dunean, Paul Esposito και Satt Lee στην αξονικά συμμετρική περίπτωση σε μια επέκταση της λύσεως των εξισώσεων του Einstein από τον Weyl.

Συνεχίζοντας από τις εξισώσεις (4γ.1-7) μετά την παραπάνω παρένθεση – συζήτηση των πραγμάτων έχουμε εξετάζοντας την στατική περίπτωση όπου a, b, f συναρτήσεις της r μόνον.

Από τις (4γ. 3,4,5) οι προκύπτουσες γραμμικά ανεξάρτητες διαφορικές εξισώσεις είναι:

$$e^{-2b} \left[\frac{2b'}{r} + \frac{e^2 b - 1}{r^2} \right] = f^2 + \frac{kf^2}{r^2} (e^{-2b} - 1) \quad (4\gamma.8)$$

$$e^{-2b} \left[\frac{2a'}{r} + \frac{1 - e^2 b}{r^2} \right] = -f^2 + \frac{kf^2}{r^2} (e^{-2b} - 1) \quad (4\gamma.9)$$

$$e^{-2b} \left[a'' - a'b' + (a')^2 + \frac{a' - b'}{r} \right] = f^2 + \frac{kfe^{-2b}}{r} \cdot [f(b' - a') - 2f'] \quad (4\gamma.10)$$

και

$$f' + \frac{2f}{r} = \frac{k}{r^2} [f'(1 - e^{-2b}) + 2fb'e^{-2b}] \quad (4\gamma.11)$$

όπου τ δηλώνει παραγωγή ως προς r . Αυτό το σύστημα διαφορικών εξισώσεων δεν είναι συναρτησιακά ανεξάρτητο (παρ' όλο ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις) γιατί η (4γ.10) είναι συνέπεια των άλλων τριών εξισώσεων.

Εξετάζουμε τις λύσεις τους από τις (4γ. 8,9,11) έπεται:

$$a' = -b' - \frac{kf^2}{r} \quad (4\gamma.12)$$

και

$$f = \frac{c}{r^2 + k(e^{-2b} - 1)} \quad (4\gamma.13)$$

όπου c σταθερά. Έτσι αν καθορίζαμε το b θα ξέραμε τα f και a από τις (4γ.13 και 8) έχουμε:

$$\frac{d}{dr} [r(1 - e^{-2b})] = \frac{c^2}{r^2 + k(e^{-2b} - 1)} \quad (4\gamma.14)$$

Αν $k=0$ οδηγούμαστε στις εξισώσεις Maxwell-Einstein. Πράγματι η γενική λύση της (4γ.14) είναι για $k=0$:

$$e^{2b} = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{c^2}{r^2}\right)^{-1}$$

όπου M σταθερά και οδηγεί στη λύση Reissner-Nordström. Αν υποθέσουμε όμως ότι $k \neq 0$ τότε έχουμε μια μορφή:

$$T' = 3r^2 + \frac{Br}{T} \quad (4\gamma.15)$$

όπου

$$B \equiv -kc^2 \quad B \equiv r \cdot [r^2 + k(e^{-2b} - 1)]$$

Επειδή η λύση της (4γ.15) σε κλειστή μορφή είναι μάλλον και αδύνατη, δηλαδή δεν έγινε δυνατό να εκφρασθεί σε μορφή συναρτήσεως στοιχειωδών συναρτήσεων αναζητούμε λύσεις της σε μορφή σειρών.

Καθώς το $r \rightarrow \infty$ τα e^{2a} , e^{2b} , f παίρνουν την μορφή:

$$\begin{aligned} e^{2a} &= 1 - \frac{2M}{r} + O(r^{-2}) \\ e^{2b} &= 1 + O(r^{-1}) \\ f &= \frac{C}{r^2} + O(r^{-3}) \end{aligned} \quad (4\gamma.17)$$

όπου M η μάζα C το φορτίο και με $O(r^{-n})$ για $m > n$ ή που τείνουν στο μηδέν όταν το $r \rightarrow \infty$ με ταχύτητα μεγαλύτερη από r^{-n} .

Τότε για μεγάλα r έχουμε :

$$T = r^3 + \gamma - \frac{B}{r} + \frac{B\gamma}{4r^4} - \frac{B^2}{5r^5} - \frac{B\gamma^2}{7r^7} + \frac{9B^2\gamma}{32r^8} - \frac{2B^3}{15r^9} + \frac{B\gamma^3}{10r^{10}} + O(r^{-11})$$

όπου γ αυθαίρετη πραγματική σταθερά με μονάδες (μήκος)³.

Για μεγάλα r τότε η παραπάνω έκφραση του T δίνει:

$$e^{2a} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{C^2}{r^2} + \frac{kC^2}{2r^4} - \frac{kMC}{2r^5} + O(r^{-6}) \quad (4\gamma.18)$$

$$\begin{aligned} e^{2b} &= 1 + \frac{2M}{r} + \frac{(4M^2 - C^2)}{r^2} + \frac{4M(2M^2 - C^2)}{r^3} + \\ &+ \frac{(C^4 - 12M^2C^2 + 16M^4)}{r^4} + \frac{M(12C^4 - kC^2 - 64M^2C^2 + 64M^4)}{2r^5} + \\ &O(r^{-6}) \end{aligned} \quad (4\gamma.19)$$

$$\begin{aligned} \text{και } E &= \frac{C}{r^2} \left[1 + \frac{2kM}{r^3} - \frac{3kC^2}{r^4} + \frac{4k^2M^2}{r^6} - \frac{24k^2MC^2}{7r^7} \right] + \\ &+ \frac{117k^2C^4}{160r^8} + \frac{8k^3M^3}{r^9} + O(r^{-10}) \end{aligned} \quad (4\gamma.20)$$

Έτσι βλέπουμε ότι οι εξισώσεις (4γ.3) (4γ.4) προλέγουν ότι στην ασυμπτωτική του συμπεριφορά το πεδίο (ηλεκτρομαγνητικό πεδίο) δεν θα

εκφράζεται ακριβώς από το $\frac{C}{r^2}$ μακριά από τις πηγές αλλά θα έχει διορθωτικούς όρους τάξεως r^{-5} και ανωτέρας που θα περιέχουν την μάζα της πηγής. Ίσως αυτό να μπορεί τότε να μας δώσει όρια για το k ως προς το μέγεθος ή το πρόσωπό του.

Είναι φανερό πως η παραπάνω λύση (4γ.18,19,20) έχει μεγάλες ομοιότητες (μέχρι όρους β' τάξεως) με την λύση Reissner-Nordström.

Αναζητώντας λύσεις για κοντινές αποστάσεις της (4γ.15) αναζητούμε T της μορφής:

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n + \sum_{n=1}^p b_n r^{-n} \quad (4\gamma.21)$$

όπου p θετικός ακέραιος.

Αν αναζητήσουμε λύση με όλα τα $b_n = 0$ για κάθε n τότε θα ζητάμε

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n .$$

Τότε έχουμε 2 περιπτώσεις:

(i) περίπτωση: $\alpha_o \neq 0$, $\alpha_1 = 0$.

$$\text{Τότε : } T = \alpha_o + \frac{Br^2}{2\alpha_o} + r^3 - \frac{B^2 r^4}{8\alpha_o^3} - \frac{Br^5}{5\alpha_o^2} +$$

$$\begin{aligned} & + \frac{B^3 r^6}{16\alpha_o^5} + r^3 - \frac{6B^2 r^7}{35\alpha_o^4} - \left(\frac{B}{8\alpha_o^3} - \frac{5B^4}{128\alpha_o^7} \right) r^8 - \\ & + \frac{B^3 r^6}{16\alpha_o^5} + r^3 - \frac{6B^2 r^7}{35\alpha_o^4} - \left(\frac{B}{8\alpha_o^3} - \frac{5B^4}{128\alpha_o^7} \right) r^8 - \\ & - \frac{16B^3 r^9}{105\alpha_o^6} + O \cdot (r^{10}) \end{aligned}$$

Για μικρά r η μετρική και το Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο εκφράζονται σαν τις εξισώσεις (4γ.6-7).

$$e^{2a} = \frac{\alpha \cdot A}{r} \left[1 + \frac{r}{A} - \frac{3c^2 r^2}{2kA^2} - \frac{c^2 r^3}{kA^3} + \frac{3c^4 r^4}{8k^2 A^4} + \frac{c^2 r^5}{k^2 A^3} + O \cdot (r^6) \right] \quad (4\gamma.22)$$

$$e^{2b} = \frac{r}{A} \left[1 - \frac{r}{A} + \left(1 + \frac{c^2}{2k} \right) - \frac{r^2}{A^2} + \frac{r^2}{A^2} - \left(1 + \frac{c^2}{k} \right) \frac{r^3}{A^3} + O \cdot (r^4) \right] \quad (4\gamma.23)$$

και

$$E = \frac{\alpha^{1/2} cr}{kA} \left[1 - \frac{r^3}{kA} - \frac{3c^2 r^5}{kA} - \frac{3c^2 r^5}{10k^2 A^3} + \frac{r^6}{k^2 A^2} + O \cdot (r^7) \right] \quad (4\gamma.24)$$

όπου $A = \alpha_o = k^{-1}$ και α θετική αδιάστατη σταθερά που προκύπτει από τον υπολογισμό του e^{2a} . Αυτό δείχνει ότι οι εξισώσεις (4γ. 3-4) προλέγουν

επίσης ότι το ηλεκτρικό πεδίο E δεν συμπεριφέρεται σαν $\frac{c}{r^2}$ (όπως συμβαίνει στη λύση Reissner – Nordström) στην περιοχή μιας σημειακής πηγής αλλά μάλλον με την μορφή $E = \sigma\alpha\theta.r + O(r^4)$.

Αξιοσημείωτο είναι το αποτέλεσμα αυτό της (4γ.24) γιατί για $r=0$ δίνει $E=0$ και όχι ∞ όπως συνήθως υπολογίζεται από την $E = \frac{c}{r^2}$.

Εξετάζοντας τώρα την μορφή της singularity στο $r=0$ έχουμε:

από τις (4γ.6-7) φαίνεται αμέσως $F_{ik}^*F^{ik} = 0$ $F_{ik}F^{ik} = -2f^2$ και δια των (4γ. 22-24) βρίσκουμε:

$$F_{ik}F^{ik} = -\frac{2c^2r^2}{k^2A^2} \left[1 + \frac{c^2r^2}{kA^2} - \frac{2r^3}{kA} + O(r^4) \right] \quad (4\gamma.25)$$

και επομένως $F_{ik}F^{ik} \rightarrow 0$ όταν $r \rightarrow 0$ δηλαδή δεν παρουσιάζει στο O «ανωμαλία» συμπεριφοράς.

Αντίθετα η βαθμωτή καμπυλότητα R δίδεται:

$$R = \frac{6c^2}{kA} \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{A} + \frac{c^2r}{2kA} + O(r^2) \right] \quad (4\gamma.26)$$

που τείνει ∞ όταν $r \rightarrow 0$. Άρα η μετρική έχει ανώμαλο σημείο το $r=0$.

(ii) περίπτωση: $\alpha_o = 0$ $\alpha_1^2 = B$ στην (4γ.20) και επειδή $B = -kc^2$ θα είναι αρνητικό.

Αυτή η περίπτωση αντιπροσωπεύει ιδιάζουσα (μη ομαλή) λύση για την (4γ.15) γιατί $T' = \Phi(r, T)$, $\Phi(r, T) \equiv 3r^2 + BrT^{-1}$ αναλυτική στην περιοχή του $(r, T) = (0, T_o)$ μόνο αν $T_o \neq 0$. Όμως εδώ η περίπτωση (ii) απαιτεί $T=0$ για $r=0$ δηλ. $T_o = 0$ ($T_o = T(0)$).

Η ανάπτυξη του T σε σειρά είναι τότε:

$$T = \alpha, r + \frac{3r^3}{4} + \frac{3r^5}{32\alpha_1} - \frac{9r^7}{256\alpha_1^2} + \frac{117r^9}{2^{11} \cdot 5\alpha_1^3} + O(r^{11})$$

για μικρά r έχουμε τις εξισώσεις (4γ.6-7) με:

$$e^{2r} = \alpha r^2 \left[\left(1 + \frac{\alpha_1}{k} \right) - \left(\frac{3}{2\alpha_1} + \frac{7}{4k} \right) r^2 + \left(\frac{75}{32k\alpha_1} + \frac{15}{8\alpha_1^2} \right) r^4 + O(r^6) \right] \quad (4\gamma.27)$$

$$e^{2b} = \frac{k}{k + \alpha_1} \left[1 + \frac{r^2}{4(k + \alpha)} - \frac{(3k + \alpha_1)r^4}{32\alpha_1(k + \alpha_1)^2} + O(r^6) \right]$$

και

$$E = \frac{\alpha^{1/2}cr}{\alpha_1} \left[1 - \frac{3r^2}{3\alpha_1} + \frac{27r^4}{16\alpha_1^2} - \frac{105r^6}{64\alpha_1^3} + \frac{2961r^8}{2^{11}\alpha_1^4} + O(r^{10}) \right]$$

όπου α θετική πραγματική σταθερά με μονάδες $(μήκος)^{-2}$. Βλέπουμε ότι πάλι για μικρά r το ηλεκτρικό πεδίο συμπεριφέρεται σαν:

$$E = \sigma\alpha\theta \cdot r + O \cdot (r^3) .$$

Όπως προηγουμένως το βαθμωτό πεδίο

$$F_{ik} F^{ik} = \frac{2}{k} \left[1 - \frac{3r^2}{2\alpha_1} + \frac{3r^4}{2\alpha_1^2} + O(r^6) \right]$$

και η καμπυλότητα:

$$R = -2 \left[\left(2 + \frac{3\alpha_1}{k} \right) \frac{1}{r^2} - \left(\frac{41}{4k} + \frac{15}{2\alpha_1} \right) + O \cdot (r) \right] .$$

Οι ανωτέρω εκφράσεις των $R, F_{ik} F^{ik}$ δείχνουν ότι οι λύσεις (ii) ποτέ δεν μπορούν να είναι ισομετρικές με τις προηγούμενες της (i) περιπτώσεις. Οι παραπάνω λύσεις των περιπτώσεων (i) και (ii) είναι στατικές σφαιρικά συμμετρικές λύσεις των εξισώσεων (3) και (4) [4γ.3 και 4γ.4] και είναι οι λύσεις που προέρχονται από την λύση της εξισώσεως 4γ.15 με την μορφή (4γ.21) και ισχύουν για καθορισμένη περιοχή του $r=0$. Κάθε μια από αυτές τις λύσεις δείχνει μια τελείως διαφορετική συμπεριφορά από την λύση Reissner-Nordström. Εξετάζοντας την συμπεριφορά του τανυστή κινητικής ενεργείας T_{ij} (της εξισώσεως 4γ.2) του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, όπως χρησιμοποιείται στην γενική σχετικότητα με την μορφή:

$$T_{ij} \equiv T_{ij} + kA_{ij}$$

όπου A_{ij} ορίζεται από την εξίσωση (4γ.5) για την περιοχή του $r=0$ υποθέτουμε ότι οι σταθερές που έχουν εμφανισθεί στις εξισώσεις (4γ.22 & 27) έχουν εκλεγεί ώστε $A > 0$ και $1 + \frac{\alpha_1}{k} > 0$ ώστε σε κάθε περίπτωση ο παρατηρητής που κινείται με το σύστημα και του οποίου η κοσμική γραμμή βρίσκεται στον V χώρο της περιοχής του $r=0$ να έχει πάντα εφαπτόμειο της κοσμικής του γραμμής time-like άνυσμα $\left(\bar{u} = e^{-\alpha} \frac{\partial s}{\partial t} \right)$ οι εξισώσεις (4γ.2,6,7, 8,13) δίνουν:

$$T(u,u) = \frac{f^2}{8\pi} \quad \text{και} \quad T(u,u) = \frac{cf}{8\pi r^2}$$

Τότε για την περίπτωση (i):

$$T(u,u) = \frac{c^2}{8\pi k^2 A^2} \left[1 + \frac{c^2 r^2}{kA^2} - \frac{2r^3}{kA} + O \cdot (r^4) \right]$$

$$T(u,u) = \frac{c^2}{8\pi k^2 Ar} \left[1 + \frac{c^2 r^2}{2kA^2} - \frac{r^3}{kA} + O \cdot (r^4) \right]$$

και για την (ii)

$$T(u,u) = \frac{c^2}{8\pi \alpha_1^2} \cdot \left[1 + \frac{3r^2}{2\alpha_1} + \frac{3r^4}{2\alpha_1^2} + O \cdot (r^4) \right]$$

$$T(u,u) = \frac{c^2}{8\pi\alpha_1 r^2} \cdot \left[1 - \frac{3r^2}{4\alpha_1} + \frac{15r^4}{32\alpha_1^2} + O(r^6) \right]$$

Παρατηρούμε ότι ο τανυστής κινητικής ενεργείας $T(u,u)$ συμπεριφέρεται πολύ καλά καθώς ο υποθετικός μας παρατηρητής (Killing observer) πλησιάζει την singularity ενώ ο $T(u,u)$ μπορεί να τείνει στο $\pm\infty$ ανάλογο αν έχουμε διαλέξει $k>0$ ή $k<0$ για την (i) και $a_1>0$ ή $a_1<0$ για την (ii).

Βλέπουμε λοιπόν ότι διαλέγοντας τον T_{ij} σαν τανυστή κινητικής ενεργείας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στην θεωρία βαρύτητος που βασίζεται στις εξισώσεις (4γ.3,4) τότε θα είχαμε περιοχές απεριόριστης πυκνότητας ενεργείας για μερικές λύσεις και για εκλογή $k<0$ ο T_{ij} δίνει περιοχές απεριόριστης αρνητικής πυκνότητας ενεργείας για ορισμένες λύσεις των (4γ.3 & 4).

Ακόμα παραδεχόμενοι μετρική την μετρική Schwarzschild και εξίσωση πεδίου την (4γ.7) τότε η (4γ.4) ανάγει την (4γ.11) με $e^{-2b} = 1 - 2Mr^{-1}$. Σαν αποτέλεσμα $F = \frac{cr}{r^3 - 2kM} (dt \otimes dr - dr \otimes dt)$ με $2M < r < \infty$ για συντεταγμένες Schwarzschild, και το F συμπεριφέρεται ομαλά στην περιοχή $r=0$ όπως ακριβώς και οι παραπάνω λύσεις.

Αν $k>0$ το F έχει ανώμαλο σημείο στο $r = (2kM)^{1/3}$ που δείχνει ότι η singularity του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου βρίσκεται πριν φθάσουμε στο $r=0$.

Την ποσότητα $\frac{cr}{r^3 - 2kM}$ ονομάζουμε ε και την αναπτύσσουμε σε δυνάμεις του r^{-1} , τότε έχουμε:

$$\varepsilon = \frac{c}{r^2} \left(1 + \frac{2kM}{r^3} + \frac{4k^2 M^2}{r^6} + \frac{8k^3 M^3}{r^9} + \dots + \frac{2^n k^2 M^n}{r^{3n}} + \dots \right)$$

συγκρίνοντας την ανωτέρω έκφραση με την εξίσωση (4γ.20) για το E βλέπουμε ότι το E περιέχει το ε στην έκφρασή του και ίσως έτσι να έχει ανώμαλο σημείο στο $r = (2kM)^{1/3}$ για $k>0$ για κάποιο r .

Αν τώρα για κάποιες τιμές του k οι ασυμπτωτικές μορφές (4γ.18-30) του πεδίου σε μακρινές αποστάσεις δεν μπορούν να συνδεθούν με τις ασυμπτωτικές εκφράσεις του πεδίου κοντά στις πηγές τότε οι εξισώσεις (4γ.3-4) δεν δίνουν ασυμπτωτικά ευκλείδειες λύσεις για μακρινές αποστάσεις και για τέτοιες τιμές του k κάθε ηλεκτρικό μονόπολο με ασυμπτωτικά ευκλείδειο εξωτερικό πεδίο βρίσκεται σε θέση μη μηδενικής αϋπνίας.

Θέλοντας να επεκτείνουμε για χρονικά εξηρημένη μετρική βλέπουμε ότι όταν τα a, β, f εξαρτώνται από τα r, t τότε μπορούμε να επιλέξουμε χρονική συντεταγμένη T στον άξονα: R ώστε το μήκος τόξου ds να δίνεται:

$$ds^2 = e^{2A} dT^2 - e^{2B} dr^2 - r^2 (\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2)$$

με A, B, Ψ συναρτήσεις μόνο της r για την σφαιρικά συμμετρική περίπτωση. Στη μη Riemann-εια περίπτωση γεωμετρίας με μη συμμετρικό θεμελιώδη τανυστή g_{ik} η ακριβής λύση των εξισώσεων Maxwell-Einstein της γενικευμένης θεωρίας βαρύτητας είναι μια κανονική ομαλή λύση με μόνη εξαίρεση τους «ορίζοντες των γεγονότων». Η μετρική για την σφαιρική συμμετρική περίπτωση έχει την μορφή

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{4\pi Q^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{k^2 Q^2}{r^4}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{4\pi Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) \quad (4\gamma.28)$$

Η αυθεντική (r', t') περιοχή λοιπόν και το «είδωλο» της με τον αντίστροφο χρόνο (αντίστοιχο του λεγομένου β' φύλλου του Riemann) σ' ένα σύνολο συνδεδεμένο μέσω του σημείου-κλάδου a (branch point a) αποτελούν την πλήρη αναλυτική επέκταση της ακριβούς λύσεως των εξισώσεων του ενοποιημένου πεδίου.

Αν $k \rightarrow 0$ ($k =$ η σταθερά από τις εξισώσεις 4γ.3, 4,5) τότε τα: $f^2(r', t')$, $b_{\pm}, r', t'$ όλα ανάγονται στη λύση Reissner-Nordström (στις ανάλογες αντίστοιχες ποσότητες της λύσεως Reissner-Nordström).

Όταν $Q \rightarrow 0$ παίρνουμε την λύση Schwarzschild όταν $4\pi Q^2 > m^2$ δεν υπάρχει ορίζων γεγονότων και οι (r, t) αρχικές συντεταγμένες καλύπτουν όλο το χώρο. Time-like και μηδενικές κοσμικές γραμμές δεν μπορούν βέβαια πάλι να διαπεράσουν την σφαίρα $r = a$, ώστε οι ακτίνες του φωτός να αγαπηθούν πάλι μέσα στον ίδιο χωρόχρονο απ' όπου έρχονται και προς το ∞ . Τότε η λύση δεν έχει καμιά «ανωμαλία» μέσα στον φυσικό χωρόχρονο.

Η ύπαρξη αυτού του μοναδικού φαινομένου όπου σωμάτια και φωτόνια μέσω της σφαίρας $r = a$ περνούν σε άλλο χωρόχρονο – κόσμος μας οδηγεί στο να χρησιμοποιούμε μια μορφή διαγράμματος Penrose με συντεταγμένες Ψ, ξ .

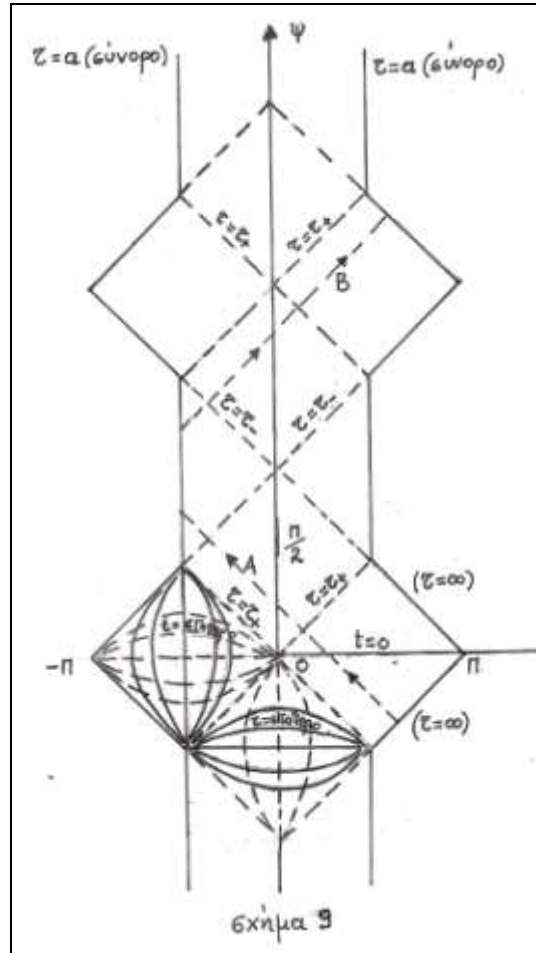
Τότε με τον μετασχηματισμό:

$$t' + r' = \tan\left(\frac{\Psi + \xi}{2}\right) \quad (4\gamma.62)$$

$$t' - r' = \tan\left(\frac{\Psi - \xi}{2}\right) \quad (4\gamma.63)$$

Έχουμε διάγραμμα Penrose για ολόκληρη την πολλαπλότητα σε πλήρη μορφή (Σχ. 9, σελ. 172). Όπως φαίνεται στο Σχ. 9 η ποιοτικές μορφές στις περιοχές r_+, r_- , $r = \infty$ είναι οι ίδιες όπως στα διαγράμματα Penrose των Reissner-Nordström. Στο διάγραμμα 9 δεν περιλαμβάνεται η περιοχή $r < a$ αλλά μόνο το time-like σύνορο $r = a$.

Μια κοσμική γραμμή φθάνει στο σύνορο (κοσμική γραμμή ή κόκκινη διακεκομμένη γραμμή) περνά ομαλά στο δεύτερο επίπεδο Riemann του $\frac{\partial r^*}{\partial r}$ που παρίσταται με συντεταγμένες $(r', -t')$ ή ως προς (Ψ, ξ) του διαγράμματος με τον μετασχηματισμό $\Psi \rightarrow -\Psi$.



Παρατηρούμε 2 διαχωρισμένα διαγράμματα Penrose που συνδέονται με τον παραπάνω μετασχηματισμό και στις 2 πλευρές τους $(\xi = \pm \pi/2)$ στα σύνορα $r=a$. Η συνέχιση μιας μηδενικής γραμμής που φθάνει στο σύνορο $r=a$ μπορεί να παρασταθεί σ' ένα τέτοιου τύπου διάγραμμα και με την «ανάκλασή» της Α έγινε κατά την κατεύθυνση Β προς τα πάνω κατά 2π που επιτρέπεται από τις ιδιότητες συμμετρίας του διαγράμματος.

Βλέπουμε ότι οι time-like κοσμικές γραμμές ποτέ δεν φθάνουν την $r=a$ αλλά συνεχίζουν να ταλαντώνονται (να διακυμαίνονται ακριβέστερα) μέσω «κατοπτρικών» συμπάντων-κόσμων αν $U_0^2 < 1$ ή πίσω στο $r=\infty$ σε ένα κατοπτρικό σύμπαν αν $U_0^2 > 1$.

Ολοκληρώνοντας καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η γενικευμένη θεωρία Maxwell-Einstein μας δίνει ένα σύμπαν χωρίς singularity στον φυσικό του χώρο. Η ύλη δεν εμποδίζεται να κατάρρευσης και να σχηματίσει μια μελανή οπή τύπου Schwarzschild (στην περίπτωση που δεν υπάρχει περιστροφή του αστερος και την οποία εξετάζουμε εδώ) όταν η ύλη αυτή φέρει μια περίσσεια Q φορτίου. Όμως η μορφή της φορτισμένης μελανής οπής διαφέρει ριζικά από την μορφή Schwarzschild και Kerr.

Εδώ η πραγματική singularity $r=0$ του πεδίου «καλύπτεται» κατά κάποιο τρόπο από μια σφαίρα ακτίνας $r = \sqrt{kQ}$ οφειλόμενη αποκλειστικά στο φορτίο Q όπως βλέπουμε ανεξάρτητα από τις σχέσεις $4\pi Q^2 > m^2$, $4\pi Q^2 < m^2$, $4\pi Q^2 = m^2$ που καθορίζουν τους επιμέρους ορίζοντες r_+ , r_- . Η σφαίρα αυτή $r = \sqrt{kQ}$ είναι αδιαπέραστη από time-like και μηδενικές κοσμικές γραμμές που σημαίνει πως ούτε σωμάτια με time-like γεωδαισιακές ούτε φωτόνια μπορούν να την διαπεράσουν αλλά προκαλείται ένα φαινόμενο «σκουληκότρυπας» με «παλλόμενο λαιμό», όπως ονομάστηκε το φαινόμενο και η οποία ονομασία ανάγεται στις εργασίες του Einstein και των συνεργατών του πάνω στην 5-διάσταση θεωρία του ενοποιημένου πεδίου A-κυλινδρικού και όπου σωμάτια και φωτόνια «ανακλώνται» - ή «αναπηδούν» - μακριά από την $r = \sqrt{kQ}$ σε πολλαπλότητα (τοπολογική πολλαπλότητα) αντιστρόφου χρόνου ($t' \rightarrow -t'$), δηλαδή κατοπτρικών χρονικά «κόσμων» ισομετρικών με τον χωρόχρονο απ' όπου προήλθαν (ανακλάστηκαν) που σημαίνει ότι και στο «νέο» τους «κόσμο-σύμπαν» η singularity υπάρχει και μάλιστα πανομοιότυπη (στην ουσία η singularity είναι μία αλλά η σφαίρα $r = \sqrt{kQ}$ είναι μια επιφάνεια που κάθε σημείο της είναι μια τοπολογική πολλαπλότητα δηλαδή το σημείο «τομής» πρακτικά απείρων (;) κατοπτρικών συμπάντων) και ότι η μετρική παραμένει αναλλοίωτη κατ' αυτήν την «ανάκλαση».

Η μελανή οπή αυτής της μορφής αποτελεί περίπτωση «γυμνής ανωμαλίας» του χωροχρόνου μόνον σε περίπτωση που σωμάτιο ή φωτόνιο ανακλάται πίσω στο ∞ μέσα στα πλαίσια του χωροχρονικού συστήματος που προήλθε, περίπτωση μάλλον αποκλειόμενη από την γενικευμένη θεωρία βαρύτητας για σφαιρικά συμμετρικές λύσεις.

Βαρυτική κατάρρευση μη σφαιρικού αξονικά συμμετρικού και φορτισμένου σώματος (περιστροφή κατά τον z άξονα)

Η μορφή της μετρικής στην περίπτωση αυτή δίνεται από τους C. Duncan, F. Paul Esposito και Scott Lee (1977) από το μήκος τόξου ds^2 στην πιο γενική του έκφραση:

$$\begin{aligned}
ds^2 = & -\frac{f}{(1-c\bar{c}f)^2 + \beta^2 f^2} [dt - 4\beta\gamma m(\cos\theta - 1)d\Phi]^2 + \\
& + \frac{(1-c\bar{c}f)^2 + \beta^2 f^2}{f} \left[\left(\frac{r^2 - 2mr}{r^2 - 2mr + m^2 \sin^2 \theta} \right)^{\gamma^2 - 1} \cdot dr^2 + \right. \\
& \left. + \frac{(r^2 - 2mr)}{(r^2 - 2mr + m^2 \sin^2 \theta)^{\gamma^2 - 1}} d\theta + (r^2 - 2mr) \sin^2 \theta d\Phi^2 \right] \quad (4\delta.I)
\end{aligned}$$

όπου: $f = \gamma(1 - 2m/r)$ και το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό δίδεται:

$$\varepsilon = \frac{cf}{1 - c\bar{c}f + i\beta f} \quad (4\delta.II)$$

β, c πραγματική και μιγαδική παράμετρος αντίστοιχα και γ είναι μια άλλη ιδιάζουσα παράμετρος που καθορίζει τον ίδιο τον χαρακτήρα της μετρικής μαζί με την παράμετρο m . Το γινόμενο $m\gamma$ δίνει την ολική μάζα του συστήματος. Όπως βλέπουμε στον ορισμό των f και ε οι παράμετροι γ και m καθορίζουν – αντίστοιχα καθορίζονται – από τα δυναμικά του πεδίου βαρύτητας και του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Αποδεικνύεται ότι (Kinnersley, Esposito, Witten 1973-75) το παραπάνω στοιχείο τόξου ds προέρχεται από μετασχηματισμό του Kinnersley με τη μέθοδο Esposito Witten του στατικού αξονικά (και όχι σφαιρικά) συμμετρικού στοιχείου τόξου:

$$ds^2 = -e^{2\lambda} dt^2 + e^{-2\lambda} [\rho^2 (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\Phi^2] \quad (4\delta.1)$$

όπου:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} = 0 \quad (4\delta.2)$$

$$\text{και} \quad \frac{\partial \mu}{\partial \rho} = \rho \left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \right)^2 - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z} \right)^2 \right] \text{ και } \frac{\partial \mu}{\partial \rho} = 2\rho \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \frac{\partial \lambda}{\partial z} \quad (4\delta.3)$$

λ είναι το Νευτώνειο δυναμικό μιας μάζας πυκνότητας γ κατανεμημένης ομογενώς κατά μήκος του άξονα z σε μήκος $2m$.

Τότε: οι (4δ.2) και (4δ.3) ολοκληρώνοντας και έχουμε:

$$\lambda = \frac{\gamma}{2} \ell u \left(\frac{r_1 + r_2 - 2m}{r_1 + r_2 + 2m} \right) \quad (4\delta.4)$$

και

$$e^{2\mu} = \left(\frac{(r_1 + r_2 + 2m)(r_1 + r_2 - 2m)}{4r_1 r_2} \right)^{\gamma^2} \quad (4\delta.5)$$

$$\text{με: } r_1 = \rho^2 + (z - m)^2 \text{ και } r_2 = \rho^2 + (z + m)^2 \quad (4\delta.6)$$

Ο μετασχηματισμός τότε:

$$\rho^2 = (r^2 - 2mr) \sin^2 \theta, \quad z = (r - m) \cos \theta \quad (4\delta.7)$$

δίνει το ds της μορφής [από την 4δ.1]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^\gamma dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^\gamma \cdot \left[\left(\frac{r^2 - 2mr}{r^2 2mr + m^2 \sin^2 \theta} \right)^{\gamma-1} - \frac{(r^2 - 2mr)^{\gamma^2}}{(r^2 - 2mr + m^2 \sin^2 \theta)^{\gamma-1}} d\theta^2 - (r^2 - 2mr) \sin^2 \theta d\Phi^2 \right] \quad (4\delta.8)$$

Είναι φανερό ότι: για $\gamma=1$ είναι η λύση Schwarzschild. Για $\gamma \neq 1$ η $r=2m$ επιφάνεια είναι μη ομαλή εκτός πάνω στον άξονα συμμετρίας. Ενώ για $r>2m$ η λύση συμπεριφέρεται ομαλά.

Η ασυνέχεια του τανυστή του Riemann ($R_{in/m}$) πάνω στο $r=2m$ φαίνεται υπολογίζοντας το μήκος μιας περιστροφής από θ έως 2π σε μια επιφάνεια $\theta=\sigma\theta$. για $r>2m$ και $r=\sigma\theta$.

Έστω το μήκος της περιφέρειας $C_\Phi(r, \gamma, m)$

$$\text{θα έχουμε: } C_\Phi(r, \gamma, m) = \int_0^{2\pi} (1 - 2mr^{-1})^{\gamma/2} (r^2 - 2mr)^{\gamma/2} \times \sin \theta d\Phi \rightarrow$$

$$\rightarrow C_\Phi(r, \gamma, m) = 2\pi r^\gamma (r^2 - 2mr)^{(1-\gamma)/2} \cdot \sin \theta \quad (4\delta.9)$$

Τότε βλέπουμε για $\gamma=0$, $C_\Phi = 0$

$$0 < \gamma < 1, \quad C_\Phi \rightarrow 0 \quad \text{όταν } r \rightarrow 2m$$

$$\gamma=1, \quad C_\Phi = 2\pi \sin \theta - 4\pi m \sin \theta$$

$$\text{όταν } r \rightarrow 2m$$

$$\text{και } \gamma > 1, \quad C_\Phi \rightarrow 0 \quad \text{όταν } r \rightarrow 2m$$

$$\text{εκτός αν } \theta=0 \text{ οπότε } C_\Phi = 0.$$

Υπολογίζοντας την τετραπολική ροπή της ανωτέρω μετρικής βρίσκουμε:

$$q = \frac{1}{3} \gamma (1 - \gamma^2) m^3 \quad (\omega\varsigma \text{ προς τον } z) \quad (4\delta.10)$$

οπότε για $\gamma=1$ έχουμε μετρική Schwarzschild για $\gamma=0$ ευκλείδειο χώρο ($q=0$ και για τις δύο) και $\gamma>1$ αντιστοιχεί σε γεωειδές σφαιροειδές (oblate spheroid) που μας δίνει το στοιχείο ότι χρειαζόμαστε για την περίπτωση που εξετάζουμε $\gamma>1$.

Μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε από την μορφή του ds (4δ.8) και τα λεχθέντα στην (4δ.10) ότι ένας μετασχηματισμός παραμέτρων μας οδηγεί στη λύση Reiss θr – Nordström:

$$m \rightarrow M - 2\pi \frac{Q^2}{r^2} \quad \text{με } M, Q \text{ μάζα και φορτίο}$$

και $t \rightarrow \sqrt{1 - k^2 \frac{Q^2}{r^4}} \cdot t$ $k = \frac{\hbar}{C^3 e}$ Q ανεξάρτητο του $t, r = \sigma \alpha \theta$.

όταν $\gamma = 1$ και για μεγάλα r .

Άρα το m είναι ένα γενικότερο μέγεθος από ό,τι ορίστηκε από τους Duncan, Esposito, Lee και εκλαμβάνόμενο σαν έτσι γενική συνάρτηση και όχι αποκλειστικά σαν μήκος ή μάζα μας οδηγεί σε πολύ γενικές μορφές λύσεων. Έτσι θεωρούμε $m = m(r)$ και για απλότητα

$$m = M - 2\pi \frac{Q^2}{r^2} \quad (4\delta.11)$$

και θεωρούμε τον χρονικό μετασχηματισμό

$$d\hat{t} = \sqrt{1 - k^2 \frac{Q^2}{r^4}} dt - \Psi d\Phi \quad (4\delta.12)$$

(ο ίδιος μετασχηματισμός τοπικά με $r = \sigma \alpha \theta$. $Q, k = \sigma \alpha \theta$. τοπικό μπορεί να γραφεί

$$\hat{t} = \sqrt{1 - k^2 \frac{Q^2}{r^4}} t - \Psi \Phi = a \cdot t - b \cdot \Phi$$

οπότε ο μετασχηματισμός αυτός θα ήταν γραμμικός αλλά η μορφή (4δ.12) είναι πολύ πιο γενική και έχει συναρτησιακό χαρακτήρα οπότε ο μετασχηματισμός μας θεωρείται μόνον ο (4δ.12) δηλαδή μόνο με την μορφή (4δ.12) και τίποτα' άλλο έστω κι' αν έτσι διατηρεί απροσδιοριστία της ακριβούς $\hat{t}(t, \Phi)$ και δεν είναι ίσως αντιστρέψιμος).

Τότε το μήκος τόξου με βάση τις (4δ.11,12) γίνεται:

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{4\pi Q^2}{r^2}\right)^\gamma \left(1 - \frac{k^2 Q^2}{r^4}\right) dt^2 - \\ & - 2 \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{4\pi Q^2}{r^2}\right)^\gamma \sqrt{1 - k^2 \frac{Q^2}{r^4}} \cdot \Psi \cdot dt d\Phi - \\ & dr^2 \cdot \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{4\pi Q^2}{r^2}\right)^{-\gamma} \left[\frac{r^2 \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{4\pi Q^2}{r^2}\right)}{r^2 \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{4\pi Q^2}{r^2}\right) + \left(M - \frac{2\pi Q^2}{r^4}\right)^2 \sin^2 \theta} \right]^{\gamma-1} - \\ & - \frac{r^{2\gamma^2} \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{4\pi Q^2}{r^2}\right)^{\gamma(\gamma-1)}}{\left[r^2 \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{4\pi Q^2}{r^2}\right) + \left(M - \frac{2\pi Q^2}{r^4}\right)^2 \sin^2 \theta \right]^{\gamma-1}} d\theta^2 - \end{aligned}$$

$$-\left[\left(1-\frac{2M}{r}+\frac{4\pi Q^2}{r^2}\right)^{-\gamma+1}\sin^2\theta-\Psi^2\right]d\Phi^2 \quad (4\delta.13)$$

και με $\gamma=1$ $\Psi=0$ μας δίνει την λύση Reissner-Nordström.

Τα παραπάνω μας δείχνουν ότι ο χαρακτήρας της λύσεως (4δ.8) είναι πολύ γενικός και η αναγωγή του στην μορφή (4δ.1) ισχυροποιεί αυτή τη γνώμη.

Για σταθερά γm οι πλειονοπολικές ροπές της λύσεως μπορούν να αυξηθούν απεριόριστα στο όριο $\gamma \rightarrow 0$ $m \rightarrow \infty$. Για $\gamma < 1$ η ανωτέρω αναφερθείσα τετραπολική ροπή γεωειδούς σφαιροειδούς γίνεται τετραπολική ροπή επιμήκους ελλειψοειδούς (prolate ellipsoid).

Όμως η συνθήκη μόνο 4δ.12 δεν αρκεί γιατί είναι καθαρά συνθήκη συγχρονισμού. Χρειαζόμαστε μια πιο ισχυρή σχέση που να διαμορφώσει σε περιστροφή την μετρική.

Εργαζόμαστε ως εξής:

Διαχωρίζουμε στη μετρική Kerr:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g r}{p^2}\right) dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta^2} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{r_g r a^2}{p^2} \sin^2 \theta\right) \sin^2 \theta d\Phi^2 + \frac{2r_g r_a}{p^2} \sin^2 \theta x \times d\Phi dt$$

$$\text{με} \quad \Delta = r^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) + a^2, \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos \theta \quad (4\delta.14)$$

τον καθαρό μετασχηματισμό συντεταγμένων από εκείνο το τμήμα του ds^2 που περιλαμβάνει το πεδίο.

Η μετρική διαχωρίζεται ως εξής από την (4δ.14):

$$ds^2 = dt^2 - \frac{\rho^2}{r^2 + a^2} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\Phi^2 + \left\{ - \left[\frac{\sqrt{r_g r}}{p} (dt - a \sin^2 \theta d\Phi) \right]^2 + \frac{\rho^2}{r^2 + a^2} \left(1 - \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \right) x dr^2 \right\} \quad (4\delta.15)$$

Το εκτός της αγκύλης τμήμα προέρχεται από την γαλιλαϊκή μετρική

$$dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \text{ εκπεφρασμένη σε συντεταγμένες γεωειδείς}$$

σφαιροειδείς

$$x = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \Phi$$

$$y = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \Phi$$

$$z = r \cos \theta$$

αντίστοιχες της εξισώσεως $\frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1$ του γεωειδούς σφαιροειδούς.

Οι επιφάνειες $r=\text{σταθ.}$ είναι γεωειδή ελλειψοειδή εκ περιστροφής και είναι ακριβώς οι επιφάνειες ισορροπίας του δυναμικού βαρύτητας και του φυγοκεντρικού δυναμικού. Είναι προφανές ότι μια τέτοια επιφάνεια όταν είναι επιπλέον φορτισμένη με Q φορτίο θα τείνει πρόσθετα να κάνει το σχήμα περισσότερο σφαιρικό επηρεάζοντας τα r και $\sqrt{r^2 + a^2}$ που αντιπροσωπεύουν τους ημιάξονες του σώματος ώστε να μειώνει την διαφορά τους λόγω απωστικών δυνάμεων μεταξύ των φορτίων.

Η σταθερά a μπορεί να πάρει πρόσθετη σημασία και για τα μαγνητικά εφφέ από την περιστροφή και επειδή η στροφορμή M διατηρείται τόσο για πεδίο βαρύτητας όσο και στο ηλεκτρομαγνητικό και επειδή $a = \frac{M}{mc}$ δεν

χρειαζόμαστε να την αλλάξουμε. Το γεωειδές σφαιροειδές είναι ιδανικό για την περίπτωση που εξετάζουμε μια και το γενικό ελλειψοειδές έχει ασυμμετρία μεγάλη για να διατηρηθεί μόνιμα όταν το σώμα είναι φορτισμένο σε αστρικό πλαίσιο και μάλιστα σε καταστάσεις βαρύτητας όπως μια μελανή οπή.

Παρατηρούμε ότι αν a είναι μηδέν ο μετασχηματισμός (4δ.1)(4δ.12) είναι ικανοποιητικός για να μας δώσει την στατική λύση.

Ακόμη ότι οι ποσότητες στην αγκύλη της μετρικής Kerr στην (4δ.15) περιλαμβάνουν τις ποσότητες της μετρικής Schwarzschild πολ/σμένες επί τον παράγοντα $\frac{r}{p}$ που τους αλλάζει το μέτρο στα πλαίσια και την κλίμακα της περιστροφής. Ενώ για την στατική περίπτωση φορτισμένης μελανής οπής ισχύει ο μετασχηματισμός από την μετρική Schwarzschild

$$\sqrt{\frac{r_g}{r}} \rightarrow \sqrt{\frac{r_g}{r} - 4\pi Q^2 / r^r} \quad (4\delta.16)$$

$$dt \rightarrow dt \sqrt{1 - \frac{k^2 Q^2}{r^4}} \quad (4\delta.17)$$

Αν σ' αυτόν τον μετασχηματισμό αλλάξουμε την κλίμακα στα πλαίσια της περιστροφής πρέπει η (4δ.16) να πολλαπλασιαστεί επί τον παράγοντα κλίμακας $\frac{r}{p}$ και να γίνει

$$\sqrt{\frac{r_g}{r}} \rightarrow \frac{r}{p} \sqrt{\frac{2m}{r} - 4\pi Q^2 / r^r} \quad (4\delta.18)$$

όπου θέσαμε r_g το ίσον του $r_g = 2m(G, c=1)$.

Τότε έχουμε την μορφή του ds^2 από τις (4δ.15,17,18)

$$\begin{aligned}
ds^2 = & \left[1 - \frac{r^2}{p^2} \left(\frac{2m}{r} - \frac{4\pi Q^2}{r^2} \right) \right] \left(1 - \frac{k^2 Q^2}{r^4} \right) dt^2 - \\
& - \frac{\rho^2}{\varphi} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \left[r^2 + a^2 + \left\{ \left(\frac{2m}{r} - \frac{4\pi Q^2}{r^2} \right) \frac{r^2 a^2}{\rho^2} \sin^2 \theta \right\} \right] \sin^2 \theta d\Phi^2 + \\
& + \frac{2r^2 a}{\rho^2} \left(\frac{2m}{r} - 4\pi \frac{Q^2}{r^2} \right) \sqrt{1 - \frac{k^2 Q^2}{r^4}} \sin^2 \theta d\Phi dt
\end{aligned} \quad (4\delta.19)$$

όπου

$$\begin{aligned}
p^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta \\
\varphi &= r \left[1 - \frac{2m}{r} + 4\pi \frac{Q^2}{r^2} \right] + a^2
\end{aligned} \quad (4\delta.20)$$

Η μετρική (4δ.19) για $Q=0$ δίνει την μετρική Kerr, για $a=0$ την μετρική Reissner-Nordström, για $a=0$ και $Q=0$ την μετρική Schwarzschild.

Η ορίζουσα του μετρικού τανυστή είναι:

$$g = - \left(1 - \frac{k^2 Q}{r^4} \right) \rho^4 \sin^2 \theta \quad (4\delta.21)$$

με ρ από την (4δ.20) και όπου $k = \frac{\hbar G}{G^3 \ell}$ ή με G , $c=1$, $k = \frac{\hbar}{\ell}$ και οι συνιστώσες του μετρικού τανυστή είναι:

$$\begin{aligned}
g_{00} &= - \left[1 - \frac{k^2 Q}{r^4} \right] \cdot \left[1 - \frac{r^2}{\rho^2} \left(\frac{2m}{r} - 4\pi \frac{Q^2}{r^2} \right) \right] \\
g_{11} &= - \frac{\rho^2}{\varphi} \\
g_{22} &= - \rho^2 \\
g_{33} &= - \left[r^2 + a^2 + \left(\frac{2m}{r} - \frac{4\pi Q^2}{r^2} \right) \frac{r^2 a^2}{p^2} \sin^2 \theta \right] \sin^2 \theta \\
g_{03} &= \frac{ar^2}{\rho^2} \left(\frac{2m}{r} - 4\pi \frac{Q^2}{r^2} \right) \cdot \sqrt{1 - \frac{k^2 Q^2}{r^4} \cdot \sin^2 \theta}
\end{aligned} \quad (4\delta.22)$$

Όπως και στην παράγραφο (4γ) παρατηρούμε ότι ουσιαστική ανωμαλία της μετρικής υπάρχει μόνο για $r \leq \sqrt{kQ}$.

Πράγματι όταν $r = \sqrt{kQ} \rightarrow g = 0$ που σημαίνει ότι το στοιχείο όγκου του 4-χώρου $dV = \sqrt{-g} dt dr d\theta d\phi$ μηδενίζεται με αποτέλεσμα η περιοχή $r = \sqrt{kQ}$ να δημιουργεί μian αδιαπέραστη σφαιρική επιφάνεια γύρω από την πραγματική singularity $r=0$. Επειδή για $r < \sqrt{kQ} \rightarrow g = 0$ σημαίνει ότι ο 4-χώρος διαιρείται σε 2 τμήματα από την επιφάνεια $r = \sqrt{kQ}$. **1)** $r \geq \sqrt{kQ}$ έναν χώρο Minkowski που αποτελεί και τον φυσικό χώρο ($g < 0$) **2)** $r < \sqrt{kQ}$ έναν Ευκλείδειο χώρο ($g > 0$) Καμιά κοσμική γραμμή μηδενική ή time-like δεν μπορεί να διαπεράσει

μια τέτοια επιφάνεια $r = \sqrt{kQ}$ όπως αποδείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Επιπλέον παρατηρούνται οι εξής χαρακτηριστικές επιφάνειες όπου η συμπεριφορά της μετρικής δεν είναι ομαλή.

$$g_{00} = 0 \begin{cases} \rightarrow r = r_a = \sqrt{kQ} \\ \rightarrow r_{0\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - (4\pi Q^2 + a^2 \cos \theta)} \end{cases} \quad (4\delta.23)$$

$$\varphi = 0 \rightarrow g_{11} = \infty \rightarrow r = r_{hor\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - (4\pi Q^2 + a^2)} \quad (4\delta.24)$$

$$g_{33} = 0 \begin{cases} \rightarrow \theta = 0 \\ \rightarrow \theta = \arcsin \frac{a^2 + r^2}{a\sqrt{r^2 - 2mar + a^2 + 4\pi Q^2}} \end{cases} \quad (4\delta.25)$$

$$g_{03} = 0 \begin{cases} \rightarrow r = r_u = \sqrt{kQ} \\ \rightarrow r = r_s = 2\pi \frac{Q^2}{m} \end{cases} \quad (4\delta.26)$$

Η μη ομαλότητα στο $r=0$ δεν αναφέρεται, σαν τετριμμένη περίπτωση, ενώ η πρόσθετα δεν έχει έννοια εδώ μια και η «ανωμαλία» του $r=0$ έχει ήδη καλυφθεί από την αδιαπέραστη επιφάνεια $r = \sqrt{kQ}$.

Η εξίσωση των μηδενικών επιφανειών (4β.12) ικανοποιείται και εδώ από την επιφάνεια $r = r_{hor\pm}$:

$$g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^k} = 0 \rightarrow f = f(r, \theta) \rightarrow$$

$$g'' \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 + g^{22} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 = \frac{1}{\rho^2} \left[\varphi \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \right)^2 \right] = 0 \quad (4\delta.27)$$

ικανοποιείται από την υπερεπιφάνεια $S_{hor}(r = r_{hor\pm})$ όπου $\varphi=0$, $\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$ της εξίσωσης (4δ.24) η εξίσωση 4δ.27 δεν ικανοποιείται στην $S_{hor}(r = r_{o\pm})$. Η εξίσωση (4δ.25) μου δίνει τετριμμένες πληροφορίες που δεν δια φωτίζουν περισσότερο την μορφή της λύσεως ενώ η (4δ.23) καθορίζει με την μεγαλύτερη ρίζα της r_{o+} το εξωτερικό όριο της εργόσφαιρας της μελανής οπής

ενώ μια σύγκριση δείχνει ότι η r_{o-} βρίσκεται πίσω από την μικρότερη ρίζα της (4δ.24) r_{hor-} .

Παρατηρώ λοιπόν 4 διαδοχικές επιφάνειες την μία εντός της άλλης και εφαπτόμενες ανά 2 στους πόλους ($\theta=0, \theta=\pi$) και οι οποίες ταξινομούνται σε σειρά αποστάσεων από το κέντρο:

$$r_{o+} \geq r_{hor+} \geq r_{hor-} \geq r_{o-} \quad (4\delta.28)$$

και r_{o+}, r_{hor+} εφάπτονται στα $\theta=0 \quad \theta=\pi$ σημεία καθώς επίσης και οι r_{hor-}, r_{o-} η ισότητα στην $r_{hor+} \geq r_{hor-}$ ισχύει μόνο όταν έχουμε διπλή ρίζα της (4δ.24) δηλαδή όταν η μάζα το φορτίο και η συνολική στροφορμή (ύλης-φορτίων) συνδέονται με την σχέση $m=4\pi Q^2 + a^2$ τότε έχουμε μόνον έναν ενιαίο ορίζοντα γεγονότων $r_{hor-} = m$ (ή στις συνήθεις μονάδες και σύμβολα $r_{hor} = \frac{r_g}{2}$

με $r_g = \frac{2Gm}{c^2}$ G σταθ. βαρύτητας, c ταχύτης του φωτός).

Πριν προχωρήσουμε στη διερεύνηση των παραπάνω επιφανειών πρέπει να προσέξουμε μια πολύ σημαντική σχέση την (4δ.26).

Παρατηρούμε ότι υπάρχει επιφάνεια $r_s = 2\pi \frac{Q^2}{m}$ στην οποία η μετρική χάνει τον μη στατικό χαρακτήρα της με τον μηδενισμό του g_{03} . Ακόμη ότι για $r > 2\pi \frac{Q^2}{m} \rightarrow \frac{2m}{r} - 4\pi \frac{Q^2}{r^2} > 0$ και η μετρική είναι κανονική.

Όταν όμως $r < 2\pi \frac{Q^2}{m}$ τότε τα g_{03} αλλάζει πρόσημο οπότε για να έχω κανονική μετρική θα πρέπει ή να αντιστρέψω τον χρόνο $t \rightarrow -t$ ή την στροφορμή $a \rightarrow -a$.

Αυτό σημαίνει ότι βρίσκομαι σε περιοχή όπου η αντιστροφή του χρόνου δεν αλλάζει το πρόσημο της στροφορμής (ιδιότητα που διατηρείται στη μετρική Kerr όπου αν $t \rightarrow -t$ και $a \rightarrow -a$ η μετρική και το ds^2 δεν αλλάζουν).

Επειδή $r_s = 2\pi \frac{Q^2}{m}$ και $r_g = 2m$ μπορώ να εκφράσω το ds^2 συναρτήσει αυτών και έχω από την (4.19) και με $\beta = \sqrt{kQ}$:

$$ds^2 = \left[1 - \frac{r^2}{\rho^2} \left(\frac{r_g}{r} - \frac{r_g r_s}{r^2} \right) \right] \left(1 - \frac{\beta^4}{r^4} \right) dt^2 - \frac{\rho^2}{\varphi} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \left[r^2 + a^2 + \left(\frac{r_g}{r} - \frac{r_g r_s}{r^2} \right) \frac{r^2 a^2}{\rho^2} \sin^2 \theta \right] x$$

$$x \sin^2 \theta d\phi^2 + + 2\sqrt{1-\beta^4} \frac{r^2 a}{r^4 \rho^2} \left(\frac{r_g}{r} - \frac{r_g r_s}{r^2} \right) \sin^2 \theta d\phi dt \quad (4\delta.29)$$

$$\begin{aligned} \text{με} \quad \varphi &= r^2 r_g r + r_g r_s + a^2 \\ \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \theta \end{aligned}$$

οπότε οι (4δ. 23-25) παίρνουν την μορφή:

$$r_{o\pm} = \frac{r_g}{2} \pm \sqrt{\frac{r_g^2}{4} - (r_g r_s + a^2 \cos^2 \theta)} \quad (4\delta.30)$$

$$r_{hor} = \frac{r_g}{2} \pm \sqrt{\frac{r_g^2}{4} - (r_g r_s + a^2)}$$

φαίνεται αμέσως ότι η οριακή τιμή του a είναι:

$$a_{\max} = \sqrt{\frac{r_g^2}{4} - r_g r_s}$$

και της στροφορμής $M=ma$ ($=mac$ με $c=1$)

$$M_{\max} = m \cdot \sqrt{\frac{r_g^2}{4} - r_g r_s} \quad (4\delta.31)$$

οι αντίστοιχες των r_o, r_{hor} είναι:

$$\begin{aligned} r_{hor} &= r_{hor+} = r_{hor-} = \frac{r_g}{2} \\ r_{o\pm} &= \frac{r_g}{2} \pm \left(\sqrt{\frac{r_g^2}{4} - r_g r_s} \right) \cdot \sin \theta \end{aligned}$$

Επειδή οι επιφάνειες $r=\beta$, $S_{o\pm}(r=r_{o\pm}), S_{hor\pm}(r=r_{hor\pm})$ έχουν ήδη εκτεθεί αναλυτικά στις προηγούμενες παραγράφους και εδώ δεν παρουσιάζουν διαφορές πρωτεύει και εδώ δεν παρουσιάζουν διαφορές πρωτεύει να ασχοληθούμε με το νέο στοιχείο $S_s(r=r_s)$ προσπαθώντας πρώτα να καθορίσουμε τη θέση της επιφάνειας αυτής.

Με βάση την (4δ.28) και με τις εκφράσεις (4δ.30) καταστρώνουμε τις ανισοτικές σχέσεις των περιπτώσεων:

1) $r_s \geq r_{o+} \longrightarrow r_s^2 \geq a^2 \cos^2 \theta \rightarrow$ που είναι δεκτή και ισχύει πάντα (το ίσον ισχύει για $r_s = a = 0$)

2) $r_{o+} \geq r_s \geq r_{hor+}$ και επειδή και $r_{hor+} \geq r_{g/2}$ έχουμε : $\longrightarrow -a^2 \cos^2 \theta \geq -a^2$ ισχύει μόνο το β' σκέλος της ανισότητας ενώ το πρώτο είναι απαράδεκτο άρα απορρίπτεται η περίπτωση αυτή.

3) $r_{hor+} \geq r_s \geq r_{hor-} \longrightarrow r_s^2 \leq -a^2$ απορρίπτεται για τους παραπάνω ίδιους λόγους.

4) $r_{hor-} \geq r_s \geq r_{o-} \longrightarrow -a^2 \cos^2 \theta \geq r_s^2 - a^2$ απορρίπτεται επίσης

5) $r_{o-} \geq r_s \longrightarrow r_s^2 \geq -a^2 \cos^2 \theta$ που είναι δεκτό.

Η σύγκριση με την $r = \beta (= \sqrt{kQ})$ είναι περιττή αφού η $r = \beta$ είναι αδιαπέραστο όριο και μάλιστα τοπολογική πολλαπλότητα όπως είδαμε στην παράγραφο 4γ. Από τα παραπάνω φαίνεται ότι η r_s μπορεί να είναι ή $r_s \geq r_{o+}$ ή $r_s \leq r_{o-}$ (ή και

$r_s = \beta$ αφού $\beta < r_{o-}$. Αλλά $r_s = 0$ μόνο όταν $Q = 0$ αφού $r_s = 2\pi \frac{Q^2}{m}$. Η

περίπτωση μάλιστα $r_s = \beta$ μας καθορίζει απόλυτα το φορτίο από τη μάζα της μελανής οπής $Q = k^{\frac{1}{3}} \left(\frac{m}{2\pi} \right)^{\frac{2}{3}}$).

Η γενική λοιπόν μορφή κατανομής των επιφανειών $S_s, S_{o+}, S_{hor\pm}, S_\beta$ είναι:

$$r_s \geq r_{o+} \geq r_{hor+} \geq r_{hor-} \geq r_{o-} \geq r_a \quad (4\delta.32)$$

η δεύτερη πιθανότητα κατανομής είναι:

$$r_{o+} \geq r_{hor+} \geq r_{hor-} \geq r_{o-} \geq r_s \geq r_a \quad (4\delta.33)$$

και επειδή δεν περιλαμβάνει την r_s στον φυσικό χώρο μακρινού ακίνητου παρατηρητή ανάγεται σε έναν απλό συνδυασμό εργόσφαιρας τύπου Kerr για $r_{o+} \geq r \geq r_{hor+}$ και περαιτέρω τοπολογικών ανωμαλιών για $r \leq r_{hor+}$ που περιγράφονται σε πλήρη μορφή από τα διαγράμματα σχ. 8 και 9 της 4γ παραγράφου με μόνη διαφορά ότι στο κατοπτρικό «σύμπαν» που θα περάσει το σώματιο – υπόθεμα θα βρεθεί σε μια νέα εργόσφαιρα $r_{hor-} > r \geq r_{o-}$ όπου θα υποχρεωθεί πάλι σε περιστροφή γύρω από τον άξονα συμμετρίας του πεδίου. Φθάνοντας στην r_{o-} ο χρόνος t ξαναγίνεται timelike αφού στο τριώνυμο $(r - r_{o+})(r - r_{o-})$ η r γίνεται μικρότερη της μικρότερης ρίζας οπότε $g_{00} > 0$ ξανά το ds^2 πάλι > 0 και έχουμε ξανά timelike γεωδαισιακή. Πλησιάζοντας στην r_s μή στατικός χαρακτήρας του πεδίου φθίνει για να εξαφανιστεί σ' ένα τοπικά ημι-γαλιλαϊκό σύστημα στο $r = r_s$ (είναι ημίγαλιλαϊκό γιατί ενώ όλες οι συντεταγμένες του χώρου και η μετρική τους γίνεται γαλιλαϊκή όμως ακόμη $g_{00} \neq 1$ τότε $ds^2 = \left(1 - \beta^4 / r^4\right) dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$, για $r = r_s$ με $x = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \cos \phi$ $y = \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \sin \phi$ $z = r \cos \theta$) και περνώντας στην περιοχή $r < r_s$ να υποστεί την αντιστροφή $\alpha \rightarrow -\alpha$ ή $t \rightarrow -t$ (όχι και τις δύο ταυτόχρονα αλλά ή την μία ή την άλλη).

Αν υποστεί την $\alpha \rightarrow -\alpha$ οι παλιρροϊκές δυνάμεις στο σύνορο $r = r_s$ θα τείνουν να το διασπάσουν ενώ θα πρέπει να υποστεί απώλεια $-2L\dot{\Phi}$ της ενεργείας του αλλά θα μπορέσει φθάνοντας στο $r = \beta$ να «ανακλαστεί» πίσω προς κάποιο άλλο κατοπτρικό σύμπαν με ασφάλεια αποφεύγοντας την singularity $r=0$ και

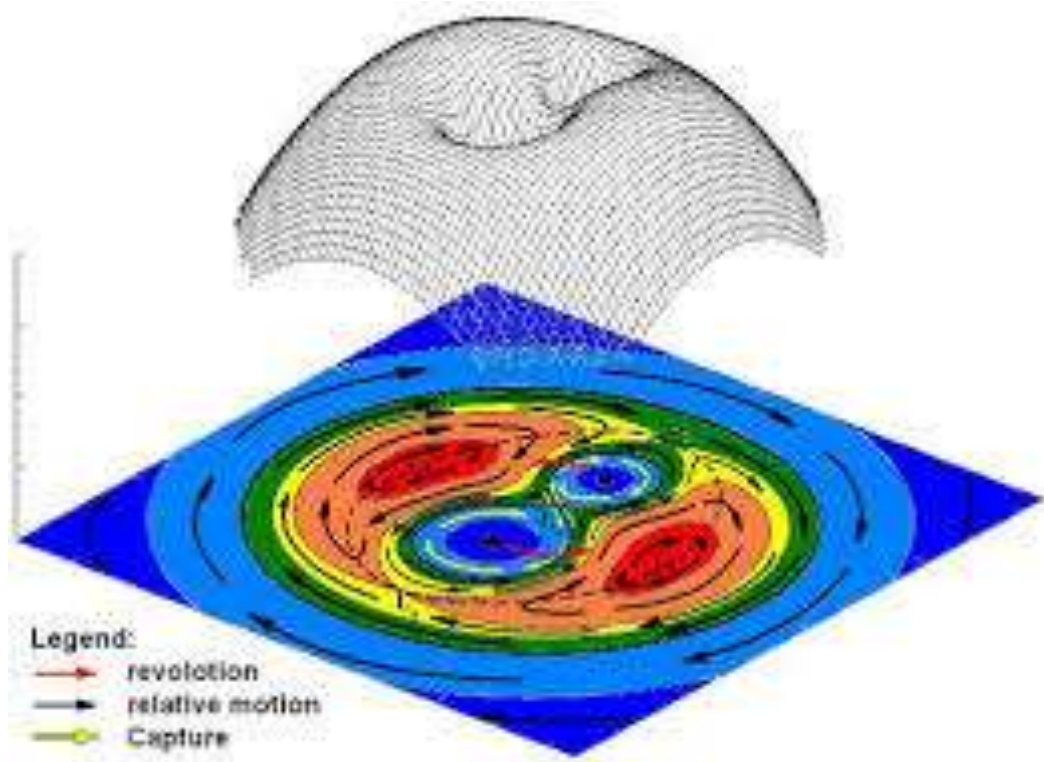
ακολουθώντας αντίστροφα τον ίδιο «περίπλοκο» δρόμο απ' όπου ήρθε. Η αντιστροφή της πορείας μετά την «αναπήδηση» στο $r = \beta$ οδηγεί σ' έναν δρόμο τύπου (4δ.32). Αυτό μας δείχνει την πλήρη σύνδεση μεταξύ των σχέσεων (4δ.32 & 33). Απ' όποιαν απ' τις δυο κι αν ξεκινήσουμε «αναπηδώντας» στο $r = \beta$ επιστρέφουμε μέσω της άλλης. Οι δυο σχέσεις (4δ.32 & 33) μοιάζουν έτσι με 2 ή «ημιπεριφέρειες» ενός και του αυτού «κύκλου» μόνο που αυτός ο «κύκλος» δεν είναι κλειστός αλλά μέσω της τοπολογικής πολλαπλότητας της $r = \beta$ γίνεται ένα ανοιχτός δρόμος προς κατοπτρικούς κόσμους σε αλληπάλληλη διαδοχή όπως φαίνεται στο Penrose σχ. 9 της παραγράφου 4γ, μια σειρά από διαδοχικές «ανακλάσεις» πάνω στο σύνορο $r = \beta$ και στο άπειρο.

Η αλλαγή του πρόσημου του g_{00} σε πλην (-) στο r_s που γίνεται πρώτα στην (4δ.32) πριν ο χρόνος να χάσει τον χρονικό του χαρακτήρα στο r_{o+} , στην συνέχεια, δεν οδηγεί παρά στην ολοκληρωτικά αρνητική μορφή του ds^2 στο r_{o+} και πέρα όπου $ds^2 < 0$ και οι γεωδαισιακές χάνουν τον time-like χαρακτήρα τους μ' αυτόν τον τρόπο πλήρως. Επειδή ο μακρινός παρατηρητής όμως μετρά τον t σε time-like μορφή θα έχει σαν φυσική συνέπεια το φαινόμενο της εργόσφαιρας με μόνη διαφορά ότι επειδή $E_o = m \left(g_{00} \frac{dt}{ds} + g_{03} \frac{d\Phi}{ds} \right)$ που και $g_{00} < 0$ και $g_{03} < 0$ θα έχουμε στην αντιστροφή του πρόσημου ακόμη μεγαλύτερη «απόσταση» ενέργειας από την μελανή οπή που θα οφείλεται και στην αντιστροφή της στροφορμής.

Οι προεκτάσεις των παραπάνω αποτελεσμάτων και μορφών είναι αρκετά ενδιαφέρουσες.

Για παράδειγμα η αντιστροφή του g_{03} μη στατικού χαρακτήρα του πεδίου, ο οποίος συνδέεται άμεσα με την περιστροφή, του συστήματος που χρησιμοποιούμε, σαν σύνολο, πάνω στο σύνορο $r = r_s$ και η αλληλοδιαδοχική επαλληλία των σχέσεων (4δ.32) (4δ.33) μας δείχνει ότι η αλληλοδιαδοχή των χωροχρονικών συστημάτων μέσα στο γενικότερο χωροχρονικό κοσμολογικό πλαίσιο πρέπει να χρησιμοποιεί μερικούς κανόνες επιλογής που σχετίζονται με τον χρονικό κατοπτρισμό και την περιστροφή των συστημάτων. Χαρακτηριστικά αν στο σύστημα του μακρινού παρατηρητή το σώμα-υπόθεμα που εισάγεται στο πεδίο (4δ.19) έχει στροφορμή δεξιόστροφη τότε μέσα από το σύνορο $r = r_s$ η στροφορμή θα γίνει αριστερόστροφη και αν έχει αριστερόστροφη στα $r > r_s$ θα έχει αντίθετα δεξιόστροφη στα $r < r_s$ ενώ στο σύνορο $r = r_s$ θα έχει μηδέν. Έτσι κλείνοντας έναν «κύκλο» θα ξεκινάει με δεξιόστροφη στροφορμή (για

παράδειγμα), περνώντας το r_s θα γίνεται αριστερόστροφη και το σώμα - υπόθεμα «αναπηδώντας» στο $r = \beta$ θα «επιστρέφει» μέσα από έναν «κατοπτρικό κόσμο» προς το $r = r_s$ για να περάσει από εκεί στο άπειρο δεξιόστροφο όπως ήρθε. Με τον ίδιο «τρόπο» αλλά σε διαφορετικό «τόπο» – επιφάνεια το σώμα υπόθεμα εναλλάσσει διαδοχικά στα αντίστοιχα σύνορα – επιφάνειες τον time-like χρόνο και την time-like γεωδαισιακή του ($ds^2 > 0$) με αντίστοιχα μεγέθη με space-like χαρακτήρα ($ds^2 < 0$) για να επιστρέψει μέσα σε κάποιο κατοπτρικό σύμπαν μέσω της πολλαπλότητας $r = \beta$ (τοπολογικής πολλαπλότητας) με τον time-like χαρακτήρα των t και ds^2 που ξεκίνησε. Σε κάθε «τόπο» (τοπολογική πολλαπλότητα) που βρίσκεται το σώμα-υπόθεμα σε κάθε σημείο της κοσμικής του γραμμής αντιστοιχούν δυο «φύλλα» του Riemann μέσω της χρονικής αντιστροφής – κατοπτρισμού. Η εικόνα φαίνεται να είναι πλήρης.



**Μελανές Οπές και αστέρες νετρονίων
στην εξέλιξη διπλών συστημάτων.**

Η ανακάλυψη των παλλομένων ραδιοπηγών (pulsars) υπήρξε η καλύτερη απόδειξη για την ύπαρξη και το καλύτερο αντικείμενο για τη μελέτη των νετρονικών άστρων.

Μια μελανή οπή, όμως, δεν ακτινοβολεί ηλεκτρομαγνητική ενέργεια ούτε ενέργεια υπό μορφή κυμάτων βαρύτητας.

Έτσι η ανίχνευση της υπάρξεως ενός τέτοιου αστρικού αντικειμένου περιορίζεται μόνο στην παρατήρηση της επιδράσεως του στατικού του πεδίου βαρύτητας ή την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία αερίου (της ύλης γενικά) που είτε εισρέει είτε επιταχύνεται λόγω του πεδίου βαρύτητας της, στην περιοχή της. Η σφαιρικά συμμετρική εισροή ύλης στην περιοχή μιας μελανής οπής μέσα στην μεσοαστρική ύλη και για τις τυπικές τιμές πυκνότητας της τελευταίας οδηγεί σε μια πολύ μικρή λαμπρότητα που είναι χωρίς ενδιαφέρον. Αλλά μια μελανή οπή σαν μέλος διπλού συστήματος είναι μια περίπτωση με πολλές υποσχέσεις. Το άστρο-σύντροφός της στο σύστημα, που η ηλεκτρομαγνητική του ακτινοβολία είναι δυνατόν να ανιχνευθεί, είναι τότε το αντικείμενο επιδράσεως της βαρυτικής δράσεως της μελανής οπής και αποτελεί επίσης μια πλούσια πηγή ύλης που μπορεί να ρέει προς την μελανή οπή.

Βέβαια οι ίδιες πιθανότητες υπάρχουν και αν το ένα μέλος του διπλού συστήματος είναι ένα λιγότερο «εξωτικό» αντικείμενο όπως ένας αστέρας νετρονίων ή ένας λευκός νάνος.

Στοιχειώδεις υπολογισμοί σχετικοί με την λαμπρότητα και την θερμοκρασία που θα προέκυπτε αν η κινητική ενέργεια της εισρέουσας μάζας μετατρέπεται σε θερμότητα δείχνουν ότι μια εκπομπή ακτίνων X είναι δυνατόν να παραχθεί όταν ύλη ρέει προς ένα αντικείμενο που έχει υποστεί κατάρρευση.

Σε μια κλασσική προσέγγιση του θέματος αν Φ είναι δυναμικό βαρύτητας τότε θα είχαμε για την λαμπρότητα L την έκφραση

$$L \simeq \Phi \frac{dM}{dt} \quad \text{όπου} \quad \frac{dM}{dt} \quad \text{ο ρυθμός απαγωγής μάζας από το σύστημα προς}$$

το υπόψη αστρικό αντικείμενο.

Τότε ένας προσεγγιστικός για την λαμπρότητα τύπος θα είναι:

$$\frac{L}{L_{\odot}} \sim 5 \cdot 10^7 \frac{M/M_{\odot}}{R/R_{\odot}} u \quad \dot{M} = \frac{dM}{dt}$$

και για την θερμοκρασία:

$$T \sim 10^7 k \cdot \frac{M/M_{\odot}}{R/R_{\odot}}$$

και όπου μετράμε $\dot{M}$ σε μονάδες $M_{\odot} \text{yr}^{-1}$. Η θερμότητα που αναπτύσσεται κατά την ροή προς ένα σώμα που έχει υποστεί κατάρρευση είναι το πιο ενδεικτικό μοντέλο για την εκπομπή ακτινοβολίας X.

Ακόμα η ύπαρξη χαμηλής ενεργείας μεταβλητών κενών στα φάσματα ακτίνων Χ εκλειπτικών συστημάτων δείχνει την ύπαρξη ρευμάτων αερίων στο επίπεδο της τροχιάς και επιβεβαιώνει την ύπαρξη μετακινουμένων μαζών που μπορούν να ρέουν προς το ένα μέλος του συστήματος. Περισσότερο η γρήγορη μεταβλητότητα και οι υψηλές θερμοκρασίες βεβαιώνουν την μεγάλη πυκνότητα της πηγής της ροής (της αιτίας της ροής).

Ένα μοντέλο ροής ύλης προς ένα ρελαβιστικό άστρο σε διπλό σύστημα δόθηκε στα 1973 από τους Shakura και Sunyaev ενώ πίο πριν από τους Zel'dovich και Novikov(1967,71) από τους Ostriker και Davidson (1973) πιο ειδικά για περίπτωση νετρονικού άστρου.

Σε κάθε περίπτωση μια κρίσιμη ροή μάζας υπάρχει που συνδέεται με την ονομαζόμενη λαμπρότητα Eddington

$$L_{cr} = 10^{38} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \text{ergyr}^{-1}$$

που αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου η πίεση της ακτινοβολίας στο ιονισμένο αέριο είναι ίση με τη δύναμη βαρύτητας την οφειλόμενη στο έλκον σώμα.

Κοντά σε μια μελανή οπή ή έναν αστέρα νετρονίων μπορεί κανείς να γράψει χονδρικά $r > r_g = \frac{GM}{c^2}$ (r_g η ακτίνα Schwarzschild) και

$$L = \Phi \dot{M} = c^2 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \right] \cdot M$$

που για μια ακτίνα $R \cong 4r_g$ ενός αστέρος νετρονίων δίνει:

$$\begin{aligned} L &\approx 0,1 c^2 \dot{M} = 0,9 \cdot 10^{20} \dot{M} \text{ (σε gr/sec) } = \\ &= 0,9 \cdot 10^{46} \dot{M} \text{ (σε } M_{\odot} / \text{yr) } \end{aligned}$$

Έτσι για ένα άστρο νετρονίων με μάζα ίση περίπου με την ηλιακή στην λαμπρότητα Eddington αντιστοιχεί μια ροή $10^8 M_{\odot} \cdot \text{yr}^{-1} \approx 10^{18} \text{ gr/sec}$. Ροή μεγαλύτερη σημαντικά από αυτήν την τιμή οδηγεί σε αποβολή μάζας υπό μορφή ακτινοβολίας και σε απώθηση της ρέουσας μάζας από την πίεση της ακτινοβολίας που εκπέμπεται. Μερικές φορές σύμφωνα με του Shakura και Sunyaev το σώμα θα παραμείνει στην περιοχή εκπομπής ακτίνων Χ και για L_x έως και 10^{38} erg/sec όταν ο παρατηρητής βρίσκεται σε κατάλληλες ορισμένες γωνίες ως προς τον άξονα του άστρου.

Το μεγαλύτερο τμήμα της ακτινοβολουμένης ενεργείας ακτινοβολείται στην περιοχή του υπεριώδους και του όρου του φάσματος αν η ρέουσα ύλη είναι αδιαφανής στην ακτινοβολία Χ.

Στο ορατό τμήμα του φάσματός του το άστρο φαίνεται σαν ένα θερμό άστρο με ταχέως διαστελλόμενο περίβλημα και έτσι ο αστέρα νετρονίων ή η μελανή

οπή «κρύβονται» από την παρατήρηση λόγω της ψυχρότερης ύλης που τα περιβάλλει.

Φυσικό είναι λοιπόν να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα ότι η μέγιστη παρατηρήσιμη φωτεινότητα θα είναι το όριο του Eddington για μια πηγή ακτίνων X και ότι τυπικές τέτοιες πηγές με τις οποίες ασχολούμαστε και που βρίσκονται στις περιοχές $L \sim 10^{35} \text{ erg/sec}$ έως 10^{38} erg/sec αντιστοιχούν σε ροή μικρότερη από $\sim 10^{-8} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$.

Θεωρώντας στην απλή περίπτωση μια μελανή οπή τύπου Schwarzschild σ' ένα διπλό αστρικό σύστημα έχουμε σύμφωνα με τα όσα έχουν ήδη αναλυθεί στην §4α ότι η παράμετρος «συλλήψεως» σωματίου από την μελανή οπή είναι:

$$\rho \leq 2cr_g \frac{1}{v_{\infty}}$$

όταν αυτό βρίσκεται αρχικά σε άπειρη απόσταση. Εμείς χρειαζόμαστε σε πεπερασμένη απόσταση την παράμετρο κρούσεως ρ .

Από τις εξισώσεις της §4α έχουμε:

$$\Phi = \frac{c^2 L}{Er^2} \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \quad (1)$$

και τα όρια συλλήψεως από την μελανή οπή δίδονται από την :

$$\left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \left[1 + \left(\frac{L}{mcr} \right)^2 \right] \quad (2)$$

ενώ η παράμετρος συλλήψεως από την

$$L = \frac{\rho E v}{c^2} \quad (3)$$

όπου v η ταχύτης του σωματίου την στιγμή της συλλήψεως οπότε βρίσκουμε

1) ότι για δεδομένη παράμετρο συλλήψεως ρ και ταχύτητα v πρέπει:

$$L \leq \frac{r^3 r}{r_g r - r_g^2} \frac{E}{c} \quad (4)$$

2) με αντικατάσταση της (4) στην (1) ότι

$$\Phi = \omega_2 \leq \frac{c}{r_g} \quad (5)$$

$$\mathbf{3)} \quad \frac{r^3}{r_g^2 r - r_g^3} \geq \frac{\rho v}{cr_g} \geq \frac{\rho \omega_2 v}{c^2} \quad (6)$$

και την οριακή τιμή για την r ,

$$r = \frac{3}{2} r_g \quad (7)$$

με αντικατάσταση της (7) στην (6) παίρνουμε:

Ακόμα η (9) μας δείχνει ότι η διαστολή του αστέρος είναι αναπόφευκτη αφού $\sigma \rightarrow 0$ τότε μόνον όταν $R \rightarrow a$ δηλαδή τότε υπάρχει λιγότερη πιθανότητα συλλήψεως ύλης από την μελανή οπή ή το $\sigma \rightarrow 0$ όταν $\varepsilon \rightarrow \frac{\pi}{2}$ δηλαδή όταν ο

άξων περιστροφής του αστέρος τείνει να προσανατολισθεί κατά μήκος της διακέντρου a . Αυτό μας λέει ότι όχι μόνο η ύλη του αστέρος ρέει προς την μελανή οπή αλλά θα πρέπει να συμβαίνει και μια διαταραχή ίσως μεταπτώσεως του άξονος περιστροφής του με τάση να προσανατολισθεί παράλληλα ή αντιπαράλληλα προς την κατεύθυνση της διακέντρου. Επίσης από την (8) φαίνεται ότι η σ μικραίνει και όταν η ω_z αυξάνει δηλαδή επίσης υπάρχει τάση η ε να μηδενισθεί και να αυξηθεί η ολική γωνιακή ταχύτης περιστροφής ω του αστέρος. Στη γενική περίπτωση και οι δύο πιθανότητες θα πρέπει να συνδυάζονται προς καταστάσεις εξισορροπήσεως των 2 τάσεων που να οδηγούν στη χαμηλότερη δυνατή ενέργεια κάτω από τις δεδομένες συνθήκες.

Επίσης η ελκτική δύναμη βαρύτητας της μελανής οπής M στο σχ. 10 φαίνεται αμέσως ότι είναι μέγιστη πάνω στον αστέρα στο σημείο Γ και ελάχιστη στα A και B . Ενώ στο κάθετο στο επίπεδο του σχήματος επίπεδο η γενική κατανομή της δυνάμεως έλξεως της μελανής οπής θα είναι περίπου κυκλικά συμμετρική γύρω από το σημείο μεγίστου Γ και λέμε περίπου γιατί η περιστροφή του αστέρος στην ουσία αποτελεί ένα στρεφόμενο σύστημα αναφοράς που δημιουργεί ασυγχρονισμό στις περιοχές καθέτως προς τον άξονα περιστροφής με αποτέλεσμα σε κάθε επίπεδο $z' = \text{σταθ}$ (z' ο άξων, ο άξων περιστροφής) η δύναμη βαρύτητας της μελανής οπής να μην είναι ακριβώς ίση δεξιά και αριστερά του μεγίστου κύκλου του αστέρος, που περιέχει το Γ , σε σημεία ισαπέχοντα από το Γ .

Πάντως είναι γεγονός ότι κάθε ύλη που υπάρχει μέσα στον κώνο που προκύπτει από την περιστροφή της γενέτειρας MA γύρω από την $M\Gamma$ θα έλκεται προς την μελανή οπή M είτε στην κλασσική είτε στην ρελατιβιστική προσέγγιση του πεδίου της M στην περιοχή $MA\Gamma B$ και αν οι συνθήκες έλξεως του πρωτεύοντος άντρου (O,R) στην περιοχή δεν μπορούν να αντισταθμίσουν την έλξη της M η ύλη θα κινηθεί προς την M σχηματίζονται ρεύματα αερίων συγκλίνοντα στην περιοχή της μελανής οπής. Τότε έχουμε την περίπτωση ενός συστήματος ανταλλαγής μάζας όπως ονομάζεται.

Ένα μοντέλο των Blumenthal Tucker (1974) για την ανταλλαγή αυτή μάζας ακολουθεί την θεώρηση των ισοδυναμικών επιφανειών (του δυναμικού βαρύτητας) γύρω από το διπλό σύστημα. Θεωρώντας περίπου σφαιρικά συμμετρικά το πεδίο γύρω από τα δύο σώματα και κατά το πρότυπο δυο σημειακών μαζών (αφού δύο σφαίρες ομογενείς σχηματίζουν γύρω τους πεδίο σαν δυο σημειακές μάζες) έχουμε τους λεγόμενους «λοβούς του Roche» ή

λοβούς (επιφάνειες) μηδενικής ταχύτητας. Το όλο σχήμα και η μορφή των «λοβών» αυτών και των ισοδυναμικών επιφανειών του πεδίου δίνεται στο σχήμα II. Όπου A κανονικό άστρο και M η μελανή οπή που μετέχει του διπλού συστήματος με το A . L_0, L_1, L_2, L_3, L_4 τα σημεία του Lagrange στο σύστημα το όλο σχήμα είναι σύμφωνο με το μοντέλο του Roche όπου **α)** Το πεδίο των 2 συστημάτων θεωρείται σαν να προέρχεται από 2 σημειακές μάζες που είναι ίσες με την μάζα κάθε αστέρος και βρίσκονται στο κέντρο του **β)** οι τροχιές των 2 σωμάτων θεωρούνται κυκλικές γύρω από το κοινό κέντρο μάζας **γ)** ο άξων περιστροφής των 2 σωμάτων είναι κάθετος στο επίπεδο τροχιάς και **δ)** η περίοδος τις ιδίας περιστροφής του αστέρος A θεωρείται ίση με την περίοδο μιας πλήρους τροχιακής περιφοράς (corotation). Η σημειωμένη με γραμμές γωνία $\varepsilon_2 M \varepsilon_1$ είναι η γωνία επισκιάσεως της ακτινοβολίας που η ύλη που φθάνει στο M εκπέμπει στο γύρω διάστημα.

Το μοντέλο περιλαμβάνει την ροή ύλης στον εσώτατο διπλό λοβό μέσω του εσωτερικού σημείου του Lagrange L_0 από την περιοχή A και M . Ο αστέρας A διαστέλλεται μέχρι να καταλάβει όλον τον αριστερό λοβό του Roche και η κινούμενη προς την Μελανή οπή ύλη εξαπλώνεται στη ροή της μέχρι και την δεύτερη ισοδυναμική επιφάνεια οπότε από το 2ο σημείο του Lagrange L_2 μπορούμε να έχουμε μια ροή ύλης έξω από τον εσωτερικό λοβό του Roche ή αντίστροφα και προς τον εσωτερικό λοβό από το γύρω κινούμενο αέριο μέσω των εξωτερικότερων ισοδυναμικών επιφανειών. Βέβαια ο κύριος όγκος της ρέουσας ύλης βρίσκεται και κινείται μέσα στους 2 κεντρικούς λοβούς και μέχρι την γραμμοσκιασμένη επιφάνεια που εκτείνεται έως την δεύτερη υποδυναμική επιφάνειας.

Σ' αυτό το μοντέλο ακόμα και με τις 4 ανωτέρω παραδοχές του Roche έχουμε ότι με εφαρμογή του νόμου του Kepler παίρνουμε απ' ευθείας πληροφορίες για τις μάζες m_1 και m_2 των A και M αντίστοιχα σύμφωνα με την σχέση

$$G(m_1 + m_2) = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 a^3$$

όπου a το μήκος της διακέντρου των άστρων (απόσταση των 2 μελών του συστήματος) και η περίοδος του διπλού συστήματος. Αν ξέρουμε την προβολή της ταχύτητας των 2 αστέρων και την περίοδο T ή την

$$\omega = \frac{2\pi}{1}$$

μπορούμε αν v_1, v_2 οι 2 προβολές της v του A και του M αντιστοίχως να έχουμε:

$$m_2 \sin^3 i = (v_2 + v_1)^2 \frac{v_1}{\omega G}$$

$$m_1 \sin^3 i = (\nu_2 + \nu_1)^2 \frac{\nu_1}{\omega G}$$

όπου i η κλίση της ταχύτητας.

Η γωνία επισκίασεως Φ εξαρτάται από την περίοδο του διπλού συστήματος με την σχέση

$$\Phi = \frac{T_{\text{occ}}}{T_{\text{orb}}} \times 180^\circ$$

όπου T_{occ} η περίοδος μεταξύ 2 διαδοχικών σκιάσεων και $T_{\text{orb}} = T$ η περίοδος της περιστροφής του διπλού συστήματος σαν σύνολο.

Η ακτινοβολία X της ύλης που «πέφτει» προς την μελανή οπή θα καθορίζεται από το όριο του Eddington $L_E = \frac{4\pi G M c}{\sigma_c}$ όπου M η μάζα G η σταθερά

βαρύτητας c η ταχύτης του φωτός και σ_c η ενεργός διατομή Compton. Οι Ruffini και Wilson πρότειναν επίσης ότι αν ένα μεγάλο τμήμα της ενεργείας που ρέει προς την οπή ακτινοβολίας είναι τότε

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_{\text{accr.}} = \frac{G m_M}{r_o} \frac{dM}{dt} \geq \frac{4\pi G m_M c}{\sigma_c} = L_E \sim 10^{38} \text{ erg} \cdot \text{sec}^{-1}$$

όταν $m_M \sim M_O$

όπου m_M η μάζα της μελανής οπής M η μάζα του αερίου που ρέει.

$\left(\frac{dE}{dt} \right)_{\text{accr.}}$ η ισχύς που ρέει προς την οπή.

$\frac{dM}{dt}$ το ποσόν μάζης ανά μονάδα χρόνου που ρέει προς την οπή.

Ενώ $\frac{dM}{dt} \simeq \pi \rho \frac{(2G m_M)}{v^3}$ όπου v η σχετική ταχύτητα και ρ η πυκνότητα του

αερίου κοντά στην μελανή οπή.

Οι Hoyle και Bondi στα 1944 είχαν προτείνει ότι η ύλη κινείται μέχρι το σημείο L_2 δηλαδή την περιοχή πίσω από την μελανή η οπή (στην αντίθετη κατεύθυνση του άστρου A όπου σχηματίζει «χοάνη» ή «στήλη» κατερχόμενη προς το σώμα M . Αυτό μπορεί να συμβαίνει εν γένει και να είναι ο «ασφαλής» τρόπος καθόδου της ύλης προς το έλκον σώμα αλλά στην περίπτωση της μελανής οπής υπάρχει λόγω του ισχυρού πεδίου βαρύτητας η δυνατότης η ύλη να κατέλθει στην επιφάνεια (r_g) της μελανής οπής και από οποιοδήποτε άλλο σημείο γύρω από αυτήν.

Αν στη θέση της μελανής οπής που περιγράψαμε παραπάνω δεχθούμε έναν αστέρα νετρονίων τότε τίποτα σχεδόν δεν αλλάζει εκτός από την ένταση των φαινομένων που περιγράψαμε και την ταχύτητα που συμβαίνουν.

Για παράδειγμα το ρέον αέριο προς τον αστέρα νετρονίων μέσω του εσωτερικού σημείου L_o του Lagrange μπορεί τότε να σχηματίσει έναν «δίσκο» περιστρεφόμενο γύρω από το σώμα και αργά συμπυκνούμενο και κινούμενο προς την επιφάνεια του νετρονικού άστρου όπου κύριο ρόλο σ' αυτήν την κίνηση προς την επιφάνεια του έλκοντος σώματος θα παίζει το φαινόμενο Roymting – Robertson για περιοχές «κρισίμου» λαμπρότητας δηλαδή η βαθμιαία απώλεια κινητικής ενεργείας περιστροφής των σωματίων της ύλης που θα περιστρέφονται σε τροχιές Kepler θα έχει σαν αποτέλεσμα την ακτινοβολία της ύλης (σαν αποτέλεσμα δηλαδή της ελαττώσεως της στροφορμής λόγω τριβών).

Αντίθετα στην περίπτωση μιας μελανής οπής τα σωματίδια ακτινοβολούν για τον αντίθετο ακριβώς λόγο.

Ένα σωματίδιο που «πέφτει» σε μια μελανή οπή τύπου Schwarzschild μπορεί, χαρακτηριστικά, να χάσει μέχρι το 40% της μάζας του ακτινοβολώντας το σε μορφή ακτινοβολίας βαρύτητας. Σ' ένα σύστημα σωματίων αερίου ρέοντος προς μια μελανή οπή οι κρούσεις μεταξύ των σωματίων κατά την «πτώση» τους προς την r_g γίνονται περίπου με ενεργό διατομή σκεδάσεως ίση σχεδόν

με την βαρυτική τους ακτίνα $\frac{3}{2}(r_g)$ αφού κοντά στο r_g οι ταχύτητές τους

πλησιάζουν στην ταχύτητα c του φωτός και η μάζα τους έχει ως επί το πλείστον ακτινοβοληθεί (μέχρι 40%). (Για υπερ- ρελατιβιστικά σωματίδια το

$r = \frac{3}{2}(r_g)$ απεδείχθη στην §4α και η σχέση ισχύει για οποιοδήποτε σώμα άρα

και για την περίπτωση εδώ). Επίσης το ίδιο συμβαίνει (Zel'dovich) και για την περίπτωση όχι μόνο ατόμων, μορίων, ηλεκτρονίων κ.λ.π αλλά και για την περίπτωση τοπικών συμπυκνώσεων πλάσματος με «παγωμένο» μαγνητικό πεδίο. Τότε η δημιουργία ρελατιβιστικών ηλεκτρονίων (με $v \rightarrow c$) κατά τις κρούσεις ευνοείται εξαιρετικά. Φυσικά σε τέτοιες περιπτώσεις το αέριο που αναφέρουμε δεν είναι καθόλου συγκρίσιμο με το μεσοαστρικό αέριο με $\bar{\rho} = 10^{-25} \text{ gr/cm}^3$ αλλά θα πρέπει να έχει αρκετά μεγαλύτερη πυκνότητα.

Ακόμα πρέπει να αναφέρουμε πως στην περίπτωση που το ένα μέλος του συστήματος δεν είναι μελανή οπή ούτε ένας αστέρας νετρονίων αλλά άλλος τύπος αστέρας τότε η για οποιονδήποτε λόγο αστάθεια του ενός μέλους και αν η απόσταση του ζεύγους είναι μικρή (συνήθως αστάθεια του αστρικού πυρήνα του ενός μέλους οδηγεί σε αποβολή μάζας η οποία αναγκαστικά θα πλησιάσει σε περιπτώσεις μικρής μεταξύ τους αποστάσεως το άλλο μέλος του συστήματος) θα οδηγήσει σε ροή μάζας προς το άλλο μέλος που αναγκαστικά θα έλθει έτσι σε καταστάσεις μεγαλύτερες της ισορροπίας του.

Η περίπτωση που το ένα μέλος είναι λευκός νάνος και δέχεται την από το άλλο μέλος αποβαλλομένη ύλη τότε μπορεί η συσσώρευση μάζας στο λευκό νάνο να προκαλέσει έναυσμα πυρηνικών αντιδράσεων του κύκλου του άνθρακος που οδηγούν σε έκρηξη Nona τον λευκό νάνο.

Η αποβολή μάζας με την έκρηξη μπορεί να οδηγήσει σε κατάσταση ισορροπίας νετρονίου άστρου έναν λευκό νάνο όπως η Supernova μπορεί να οδηγήσει την ίδια κατάσταση ένα πιο μαζικό σώμα.

Δηλαδή ένα διπλό σύστημα ανταλλαγής μάζας μπορεί να οδηγήσει στην «γέννηση» ενός άστρου νετρονίων όπως ένας αστέρας νετρονίων μπορεί να οδηγήσει το σύστημα σε μορφή συστήματος ανταλλαγής μάζας.

Για ένα διπλό σύστημα με ένα μέλος μια μελανή οπή το μέλλον του συνοδού – αστέρος της οπής είναι εξ' αρχής προφανώς καθορισμένο. Ακόμη και μια έκρηξη του αστέρος ώστε η ισορροπία ή η απόσταση μεταξύ των 2 μελών να αυξηθεί δεν θα είχε καν ένα αποτέλεσμα παρά μόνο ίσως μια παράταση χρόνου αμφίβολη κι' αυτή γιατί δεν είναι γνωστά τα «εφέ» μιας εκρήξεως σ' έναν ισχυρά καμπυλωμένο χώρο όπως είναι ο χώρος γύρω από μια μελανή οπή.

Για έναν αστέρα νετρονίων σε διπλό σύστημα πάλι, η συγκέντρωση μάζας που ρέει από το άλλο μέλος του συστήματος προς τον νετρονικό αστέρα δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι θα προκαλούσε έναυσμα σε πυρηνικές αντιφάσεις ή κάποιο άλλο βίαιο αποτέλεσμα στο νετρονικό άστρο λόγω ακριβώς της φύσεως της ύλης του.

Μια συγκέντρωση μάζας σε υπερβολικό βαθμό θα μπορούσε να προκαλέσει συμπτυνουμένη προς τον αστέρα κατάσταση αστάθειας (όταν η μάζα του αστέρος νετρονίων υπερβεί το όριο των $0,7M_{\odot}$ δεν υπάρχει ισορροπία όταν το άστρο δεν περιστρέφεται. Αν περιστρέφεται, και οι αστέρες νετρονίων έχουν συνήθως ταχύτατη περιστροφή $\sim 10^3 \text{ sec}^{-1}$ τότε το όριο φθάνει τα $1,2 M_{\odot}$).

Η πιθανότητα η αστάθεια αυτή όταν ο αστέρας νετρονίων στο διπλό σύστημα αποκτήσει μάζα $> 1,2 M_{\odot}$ λόγω της ανταλλαγής μάζας, να οδηγήσει σε βαρυτική κατάρρευση του αστέρος είναι μια πολύ ενδιαφέρουσα πιθανότητα και θα οδηγούσε σε ένα διπλό σύστημα με ένα μέλος μια μελανή οπή. Το ίδιο θα μπορούσε να συμβεί και σε οποιοδήποτε σύστημα ανταλλαγής μάζας 2 αστέρων αν ο ένας αστέρας – δέκτης της ύλης ήταν αρκετά ψυχρός και οι πυρηνικές αντιδράσεις στο εσωτερικό του δεν δημιουργούσαν έκρηξη του αστέρος αλλά η συσσωρευμένη ύλη διαρκώς αυξανόμενη κατέρρεε πέρα από ένα κρίσιμο όριο. Η απαίτηση να είναι ψυχρός ο αστέρας γίνεται γιατί η ψυχρή ύλη δεν μπορεί να αντισταθεί στη βαρύτητα ως γνωστόν. Ένα θερμό άστρο θα ερχόταν από τη συσσωρευόμενη μάζα σε άλλες καταστάσεις

αστάθειας εκτός από μια βαρυτική κατάρρευση που για θερμό άστρο πρέπει να αποκλεισθεί σαν πιθανότητα τελείως.

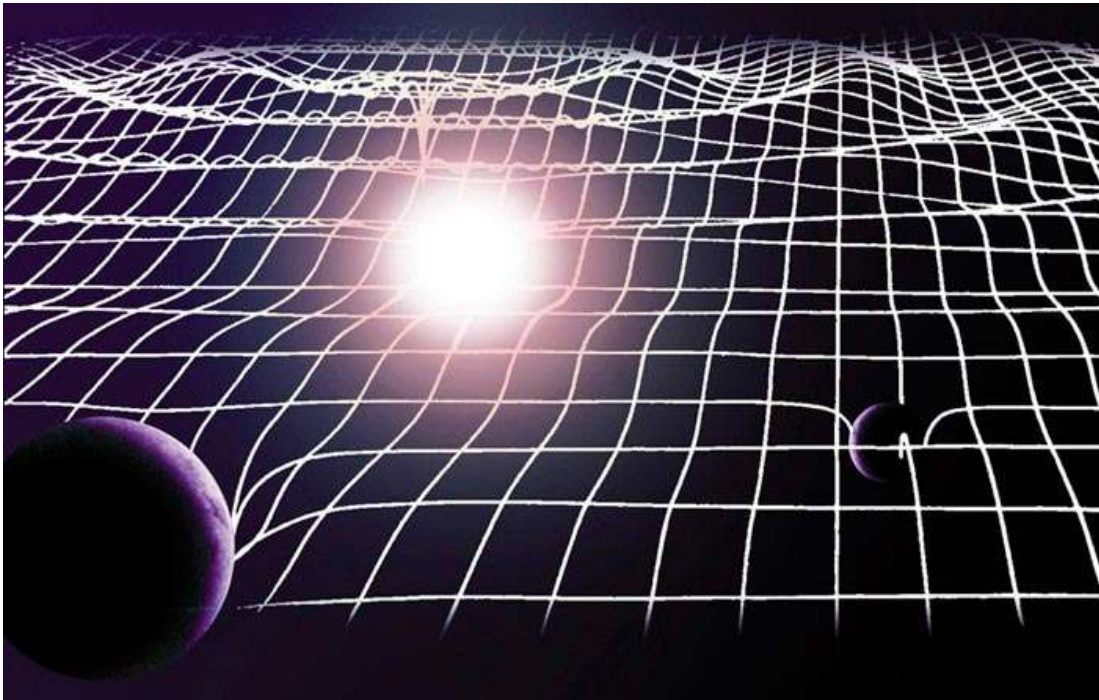
Ένας αστέρας νετρονίων όμως έχει τις παραπάνω προϋποθέσεις άρα θα μπορούσε σε μάζες $>1,2 M_{\odot}$ να καταρρεύσει προς μια μελανή οπή. Η κίνηση ενός αερίου συστήματος ύλης κάτω από την αντίδραση του πεδίου βαρύτητας μιας μελανής οπής περιγράφεται ικανοποιητικά από τις εξισώσεις 49,50,51,52, της §3 σελ. 68,69,70 και σχ. 2 για την περίπτωση αερίου με πίεση $p=0$.

Η ακτινοβολία-βαρύτητας που εκπέμπεται από την ύλη κατά την «πτώση» της προς μια μελανή οπή δεν είναι ένα ειδικό φαινόμενο που συμβαίνει εκεί μόνο. Απλώς η κλίμακά του τότε είναι υπολογίσιμη και παρατηρήσιμη (δηλαδή μετρήσιμη στην ουσία). Η ακτινοβολία βαρύτητας συναντάται σ' όλη την εξέλιξη ενός άστρου με την ακτινοβολία της δυναμικής ενεργείας του πεδίου σαν πηγή ενεργείας του (πρόσθετη φυσικά).

Κάθε σώμα κινούμενο σε πεδίο βαρύτητας ακτινοβολεί επίσης όταν βρίσκεται σε μη σταθερές τροχιές.

Η ανίχνευση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας δίνει πολύτιμες πληροφορίες για τα αστρικά συστήματα διπλά ή όχι, για τη δομή των αστέρων και την φύση τους γενικά, για την μεσοαστρική ύλη, για χαώδη ουράνια σώματα και γαλαξίες ακόμα και για τα όρια του σύμπαντος.

Παρ' όλα αυτά δεν μπορεί να μας δώσει άμεσες παρά μόνο έμμεσες πληροφορίες για την ειδική περίπτωση ενός σώματος όπως μια μελανή οπή. Οι πληροφορίες που μπορούν να μας προσφέρουν τα κύματα βαρύτητας και η – όπως λέγεται – τανυστική ακτινοβολία (tensor radiation) μόνο τελευταία μπόρεσαν να βγουν στο φως.



Βαρυτικά Κύματα

Όπως στην ηλεκτροδυναμική έτσι και στη ρελατιβιστική θεωρία βαρύτητας η πεπερασμένη ταχύτητα της διαδόσεως των αλληλεπιδράσεων οδηγεί στην ύπαρξη (ακριβέστερα πιθανότητα υπάρξεως) των Βαρυτικών κυμάτων.

Αρχικά εξετάζουμε τις εξισώσεις ενός ασθενούς βαρυτικού κύματος στο κενό. Έστω η γαλιλαϊκή μετρική $g_{ik}^{(o)}$ και g_{ik} η μετρική του καμπύλου 4-χώρου. Τότε αν το κύμα είναι ασθενές η μεταβολή της μετρικής $g_{ik}^{(o)}$ προς την g_{ik} θα εκφράζεται από ένα μικρό μέγεθος h_{ik} που θα παριστά την διαταραχή αυτή προσθετικά δηλ.

$$g_{ik} = g_{ik(o)} + h_{ik} \quad (1)$$

και ο αναλλοίωτος μετρικός τανυστής θα είναι για όρους πρώτης προσεγγίσεως

$$g^{ik} = g^{ik(o)} \sim h_{ik} \quad (2)$$

και η ορίζουσα $g = |(g_{ik})|$ θα είναι:

$$g = g^{(o)}(1 + h) \quad (3)$$

($h = h_i^i$ άθροισμα στον i) και όλες οι διαδικασίες ανόδου-καθόδου δεικτών θα γίνονται με την γαλιλαϊκή μετρική $g^{ik(o)}$.

Ο h_{ik} ορίζεται σαν τα δυναμικά του πεδίου βαρύτητας που προέρχονται από έναν μετασχηματισμό $x'^i = x^i + \xi^i$ των συντεταγμένων με ξ^i μικρές ποσότητες. Τότε σύμφωνα με τον νόμο μετασχηματισμού των g_{ik} έχουμε :

$$\begin{aligned} g'^{ik}(x'^i) &= \frac{\partial x'^i}{\partial x^\ell} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^m} g^{lm}(x^\ell) \rightarrow \\ &\rightarrow g'^{ik}(x'^i) \approx g^{ik}(x^\ell) + g^{im} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{k\ell} \frac{\partial x'^i}{\partial x^\ell} \end{aligned}$$

θέτοντας στο $x'^i = x^i + \xi^i$ το ίσον του και αναπτύσσοντας σημειακά (τοπικά) κατά Taylor παίρνουμε

$$g'^{ik} = g^{ik} + \xi^{i;k} + \xi^{k;i} \quad (4)$$

και επειδή η μετρική $g_{ik}^{(o)}$ είναι γαλιλαϊκή οι παράγωγοι $_{;k}$ ισοδυναμούν με $\frac{\partial}{\partial x^k}$

$$\text{άρα} \quad h'_{ik} = h_{ik} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x^i} \quad (5)$$

Ορίζοντας τον τανυστή:

$$\frac{\partial \Psi_i^k}{\partial x^k} = 0 \quad \Psi_i^k = h_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k h \quad (6)$$

και τότε ο τανυστής του Ricci παίρνει την απλή μορφή.

$$R_{ik} = \frac{1}{2} \square h_{im} \quad (7)$$

όπου $\square$ η D' Alembertion και

$$\square = g^{\ell m(o)} \frac{\partial^2}{\partial x^\ell \partial x^m} \left(\vec{\nabla}^2 - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \right)$$

Αφού τα h_{ik} ικανοποιούν τις παραπάνω σχέσεις τότε και τα h'_{ik} της (5) θα ικανοποιούν τις ίδιες σχέσεις αλλά μόνο αν τα ξ^i ικανοποιούν την σχέση.

$$\Psi \xi^i = 0 \quad (8)$$

Τότε επειδή ο χώρος είναι κενός και γαλιλαϊκός θα έχουμε στην (7)

$$R_{ik} = 0 \longrightarrow \square h_i^k = 0 \quad (9)$$

Τότε ένα ασθενές επίπεδο κύμα όπου το πεδίο μεταβάλλεται μόνο κατά μία διεύθυνση έστω $x' = x$ θα μας δίνει από την (9):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) h_i^k = 0 \quad (10)$$

Επειδή διαδίδεται μόνο κατά την διεύθυνση x όλα τα h_i^u θα είναι συναρτήσεις του $t - \frac{x}{c}$ και οι (6) δίνουν

$$\frac{\partial \Psi_i^1}{\partial t} - \frac{\partial \Psi_i^0}{\partial t} = 0$$

και μια ολοκλήρωσή της θα μας δώσει:

$$\Psi_i^1 = \Psi_i^0$$

(με σταθερά μηδέν για την ολοκλήρωση) ανάλογα και οι άλλες συνιστώσες του Ψ_i^k θα μας δώσουν

$$\Psi_2^1 = \Psi_2^0, \Psi_3^1 = \Psi_2^0 \text{ και } \Psi_0^1 = \Psi_0^0 \quad (11)$$

Αλλά ακόμα το σύστημα αναφοράς δεν έχει ορισθεί.

Τότε θέτω στον μετασχηματισμό

$$x'^i = x^i + \xi^i$$

την μορφή των ξ^i από την (8).

$$x'^i = x^i + \xi^i \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

που μου δίνει για τις (11):

$$\Psi_1^0 = 0, \Psi_2^0 = 0, \Psi_3^0 = 0, \Psi_2^2 + \Psi_3^3 = 0$$

ενώ οι $\Psi_2^3, \Psi_2^2 - \Psi_3^3$ δεν μπορούν να γίνουν μηδέν γιατί από την (5) φαίνεται ότι δεν αλλάζουν με τον μετασχηματισμό $\xi^i \rightarrow \xi^i \left(t - \frac{x}{c} \right)$.

Επειδή $\Psi = \Psi_i^i = 0 \longrightarrow \Psi_i^k = h_i^k$ οπότε για τα h_i^k ισχύουν ανάλογες σχέσεις όπως για τα Ψ_i^k .

Αυτό μας οδηγεί ότι ένα επίπεδο βαρυτικό κύμα ορίζεται από 2 ποσότητες

h_{23} και $h_{22} = -h_{33}$.

Άρα τα βαρυτικά κύματα είναι εγκάρσια κύματα που η πολικότητά τους ορίζεται από έναν συμμετρικό τανυστή 2ας τάξεως στο y,z επίπεδο. Το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του $h_{22} + h_{33} = 0$ είναι μηδέν.

Υπολογίζοντας τον ψευδο-τανυστή κινητικής ενεργείας του πεδίου βαρύτητας και παραλείποντας όρους ανώτερους των β' τάξεως παραγώγων έχουμε: μόνος μή μηδενικός όρος είναι ο:

$$\frac{1}{2} g^{i\ell} g^{km} g_{np} g_{qr} g^{nr}{}_{,\ell} g^{pq}{}_{,m} = \frac{1}{2} h_q^{n,i} h_n^{q,k}$$

οπότε ο t^{ik} του πεδίου είναι:

$$t^{ik} = \frac{c^4}{32\pi k} h_q^{n,i} h_n^{q,k} \quad (12)$$

Η ροή ενεργείας στο κύμα δίνεται από την

$$-cgt^{oa} \approx ct^{oa}$$

Επειδή το κύμα διαδίδεται κατά την διεύθυνση του $x' = x$ έχουμε:

η ροή ενεργείας θα γίνεται κατά τον άξονα $x' = x$ και θα χαρακτηρίζεται από την εξίσωση:

$$ct^{01} = \frac{c^3}{16\pi k} \left[h_{23}^2 + \frac{1}{4}(h_{22} - h_{33})^2 \right] \quad (13)$$

Υπολογίζοντας σε δεύτερο σκέλος τώρα ισχυρά βαρυτικά κύματα χρησιμοποιούμε πάλι έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων και αναζητούμε των εξισώσεων του Einstein.

Γι' αυτού χρησιμοποιούμε σύστημα όπου όλες οι συνιστώσες του g_{ik} να είναι συναρτήσεις μόνο μιας μεταβλητής έστω x^0 .

Τότε:

$$x^a \rightarrow x^a + \Phi^a(x^0) \quad (14)$$

$$x^0 \rightarrow \Phi^0(x^0) \quad (15)$$

είναι ο μετασχηματισμός.

Φ^0, Φ^a τυχούσες συναρτήσεις του x^0 .

Υπάρχουν τότε 2 περιπτώσεις:

1) $|g_{\alpha\beta}| = 0$ και 2) $|g_{\alpha\beta}| \neq 0$ στην πρώτη αντιστοιχεί σύστημα όπου τα $g_{oa} = 0$ για κάθε a με την συνθήκη:

$$g_{oa} + g_{a\beta} \dot{\phi}^\beta = 0 \left(\cdot = \frac{\partial}{\partial x^0} \right)$$

που καθορίζει τα $\phi^\beta(x^0)$ ώστε $g_{oa} = 0$. Η λύση αυτή όμως αντιστοιχεί σ' ένα ανισότροπο γαλιλαϊκό 4-χώρο.

Εκλέγουμε λοιπόν την δεύτερη περίπτωση $|g_{\alpha\beta}| \neq 0$ όπου όμως δεν μπορούν όλα τα $g_{\alpha\alpha}$ να είναι μηδέν.

Αντίθετα όμως εκλέγουμε σύστημα ώστε

$$g_{00} = g_{02} = g_{03} = 0 \text{ και } g_{01} = 1 \quad (16)$$

Τότε η μεταβλητή x^0 έχει έναν χαρακτήρα φωτός και για $dx^a = 0$, $dx^0 \neq 0 \rightarrow ds = 0$.

Ορίζουμε την μεταβλητή $x^0 = \eta$ (συμβολίζουμε για την ακρίβεια x^0 με η). τότε με την συνθήκη (16) έχουμε για το ds^2 :

$$ds^2 = 2dx^0 d\eta + g_{\alpha\beta} (dx^\alpha + g^\alpha dx^1) (dx^\beta + g^\beta dx^1) \quad (17)$$

Σε όλα τα επόμενα οι δείκτες α, β παίρνουν τις τιμές 2,3 μόνο και ο $g_{\alpha\beta}$ μπορεί να θεωρηθεί σαν τανυστής 2 διατάσεων.

Τότε ο υπολογισμός των εξισώσεων του πεδίου δίνει:

$$R_{ab} = -\frac{1}{2} g_{ac} \dot{g}^c g_{bd} \dot{g}^d = 0$$

Έπεται τότε: $g_{ac} \dot{g}^c = 0$ ή $\dot{g}^c = 0$ που σημαίνει:

$$\dot{g}^c = \text{σταθ.}$$

Τότε με τον μετασχηματισμό:

$$x^a + g^a x^1 d\eta + g_{ab}(n) \cdot dx^a dx^b \quad (18)$$

Η μετρική δίνει ορίζουσα $-g \neq 0$ και τα σύμβολα του Christoffel είναι όλα μηδέν εκτός από τα:

$$\Gamma_{bo}^a = \frac{1}{2} k_b^a, \quad \Gamma_{ab}^1 = -\frac{1}{2} k_{ab} \quad (19)$$

όπου

$$K_{ab} = \dot{g}_{ab} \text{ και } K_a^b = g^{bc} k_{ac}$$

Από όλες τις συνιστώσες τότε του τανυστή του Ricci η μόνη που έχει ενδιαφέρον είναι η R_{oo} ώστε:

$$R_{oo} = -\frac{1}{2} \dot{K}_a^a - \frac{1}{4} K_a^b K_b^a = 0 \quad (20)$$

ώστε οι τρεις συνιστώσες $g_{22}(n)$ $g_{33}(n)$ $g_{23}(n)$ πρέπει να ικανοποιούν μόνο μία εξίσωση την (20).

Αν θέσω

$$-g = X^4 = |g_{ab}| \quad (21)$$

μπορώ τότε να γράψω τα g_{ab} με την μορφή:

$$g_{ab} = -x^2 \gamma_{\alpha\beta} \text{ με } |\gamma_{\alpha\beta}| = 1 \quad (22)$$

και αντικαθιστώντας στην (20) έχω:

$$\ddot{x} + \frac{1}{8} (\dot{\gamma}_{ac} \gamma^{bc}) (\dot{\gamma}_{bd} \gamma^{ad}) x = 0 \quad (23)$$

(ο γ^{ab} είναι ο τρισδιάστατος ορθογώνιος τανυστής του γ_{ab} .) Αν θεωρήσω τυχαίες $\gamma_{ab}(n)$ συναρτήσεις του n μπορώ να ορίσω την συνάρτηση $x(n)$.

Φθάνουμε έτσι σε μια λύση με 2 τυχαίες συναρτήσεις. Εύκολα φαίνεται πως περιλαμβάνει την λύση για τα ασθενή κύματα που εξετάσαμε πριν για ένα κύμα που διαδίδεται κατά μία διεύθυνση.

Με τον μετασχηματισμό $\eta = \frac{t+x}{\sqrt{2}}$ $x' = \frac{t-x}{\sqrt{2}}$ παίρνουμε τα προηγούμενα (για τα ασθενή κύματα).

Θέτω $\gamma_{ab} = \delta_{ab} + h_{ab}(n)$ όπου h_{ab} μικρές ποσότητες με την συνθήκη

$$h_{22} + h_{33} = 0$$

και έχουμε ότι για μέχρι όρους και α' τάξεως η $x=\text{σταθ.}$ ικανοποιεί την (23) με κατάλληλα γ_{ab} .

Θεωρούμε ένα ασθενές βαρυτικό κύμα πεπερασμένης εκτάσεως (κυματόδεμα) καθώς περνά κάποιο σημείο x .

Μόλις φθάνει στο σημείο έχουμε:

$$h_{ab} = 0 \quad x = \alpha = \text{σταθ.}$$

μόλις έχει περάσει (στο τέλος του περάσματός του από το σημείο) θα έχουμε:

$$\text{πάλι } h_{ab} = 0 \text{ αλλά } \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0.$$

Τότε οι β' τάξεως όροι της (23) δίνουν μια μη μηδενική αρνητική τιμή στο $\frac{\partial x}{\partial t}$:

$$\frac{\partial x}{\partial t} \approx -\frac{1}{8} \int \left(\frac{\partial h_{ab}}{\partial t} \right)^2 dt < 0$$

και το ολοκλήρωμα παίρνεται για τον χρόνο που έκανε να περάσει το κύμα). Έτσι μόλις πέρασε το κύμα $x = \alpha = \text{σταθ.}t$ και μετά πεπερασμένο χρόνο το x αλλάζει πρόσημο. Αλλά για να αλλάξει το πρόσημό του αν t συνεχής δηλαδή ο t παίρνει όλες τις τιμές του διαδοχικά χωρίς «κενά» το x πρέπει μ' αυτές τις συνθήκες να περνά κάποια στιγμή από την τιμή 0. Αλλά $x=0$ σημαίνει $g=0$ δηλαδή singularity στην μετρική.

Αυτή η singularity όμως δεν έχει φυσικό χαρακτήρα. Αντιστοιχεί στην «ανατροπή» του συστήματος αναφοράς με το πέρασμα του βαρυτικού κύματος και μπορεί να εξαλειφθεί με κατάλληλο μετασχηματισμό. Μετά το «πέρασμα» του βαρυτικού κύματος ο χώρος ξαναγίνεται γαλιλαϊκός.

Αυτό μπορεί να αποδειχθεί απ' ευθείας. Αν μετράμε την η μεταβλητή έτσι από την τιμή της που αντιστοιχεί στο singular σημείο, $x=n$, ώστε

$$ds^2 = 2dn dx' - n^2 \left[(dx^2)^2 + (dx^3)^2 \right]$$

με τον μετασχηματισμό $nx^2 = y$

$$nx^3 = z \quad x' = \xi - \frac{y^2 + z}{2n} \quad \text{έχουμε:}$$

$$ds^2 = 2dnd\xi - dy^2 - dz^2$$

ενώ ο μετασχηματισμός $n = \frac{t+x}{\sqrt{2}} \quad \xi = \frac{t-x}{\sqrt{2}}$ φέρνει την μετρική σε γαλιλαϊκή μορφή.

Άρα υπάρχει μια ιδιότητα των βαρυτικών κυμάτων να δημιουργούν ένα φανταστικό singular σημείο στη μετρική στο σημείο διόδου τους.

Ας εξετάσουμε τώρα την ακτινοβολία των βαρυτικών κυμάτων.

Θεωρούμε ασθενή κύματα που παράγονται από σώματα κινούμενα με ταχύτητες μικρές ως προς την ταχύτητα του φωτός.

Ισχύει η (7) που ορίσαμε τα Ψ_i^k ως προς h_i^k .

Η εξίσωση όμως $\square h_i^k = 0$ δεν θα ισχύει εν γένει έχοντας στο δεξιό μέλος όρους εξαρτώμενους από τον τανυστή κινητικής ενεργείας της ύλης T_i^k .

Γράφουμε τις εξισώσεις αυτές με την μορφή:

$$\frac{1}{2} \square \Psi_i^k = \frac{8\pi k}{c^4} T_i^k \quad (24)$$

όπου τ_i^k είναι οι βοηθητικές ποσότητες που προέρχονται από την προσέγγιση των ακριβών εξισώσεων του Einstein για ασθενές πεδίο.

Δηλαδή τα τ_i^k συμπίπτουν με τα T_i^k των εξισώσεων του Einstein

$$\left(R_i^k - \frac{1}{2} \delta_i^k R = \frac{8\pi k}{c^4} T_i^k \right)$$

μέχρι τους απαραίτητους για την προσέγγιση όρους

Από την (6) έχουμε:

$$\frac{\partial \Psi_i^k}{\partial x^k} = 0 \quad \text{και δια της (24)} \quad \longrightarrow$$

$$\frac{\partial \tau_i^k}{\partial x^k} = 0 \quad (28)$$

που είναι η αντίστοιχη της $T_{i;k}^k = 0$ για γαλιλαϊκή μετρική.

Οι εξισώσεις αυτές θα πρέπει να καθορίζουν το πεδίο μακριά από τα σώματα που το παράγουν σε αποστάσεις μεγάλες ως προς το μήκος κύματος των ακτινοβολουμένων κυμάτων.

Ένα ολοκλήρωμα της (24) είναι:

$$\Psi_i^k = -\frac{4k}{c^4} \int \left(\tau_i^k \right)_{t-\frac{r}{c}} \frac{dV}{R} \quad (26)$$

και επειδή οι ταχύτητες όλων των σωμάτων του συστήματος είναι μικρές μπορούμε να γράψουμε για μεγάλες αποστάσεις που θέλουμε:

$$\Psi_i^k = -\frac{4k}{c^4} \int (\tau_i^k)_{t-\frac{R}{c}} dV \quad (27)$$

Όπου R_o η απόσταση από την αρχή δηλαδή από ένα εσωτερικό σημείο του συστήματος.

Με τη βοήθεια της (25) διαχωρίζουμε τις συνιστώσες χώρου και χρόνου του τ_i^k :

$$\frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial x^o} = 0 \quad (28)$$

$$\text{και} \quad \frac{\partial \tau_{o\gamma}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial T_{oo}}{\partial x^o} = 0$$

υπολ/ζοντας επί x^β την πρώτη ολοκληρώνουμε πάνω σ' όλο τον χώρο:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^o} \int \tau_{\alpha o} x^\beta dV &= \int \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma} x^\beta dV \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{\partial}{\partial x^o} \int \tau_{\alpha o} x^\beta dV = \int \frac{\partial (\tau_{\alpha\gamma} x^\beta)}{\partial x^\gamma} dV - \int r_{\alpha\beta} dV \end{aligned}$$

και αφού $\tau_{ik} = 0$ στο άπειρο, τότε ένας μετασχηματισμός με το θεώρημα Gauss κάνει το β' μέλος να είναι μηδέν το πρώτο ολοκλήρωμα.

Το ημίθροισμα της απομένουσας εξισώσεως με αντίστροφους δείκτες μας δίνει.

$$\int \tau_{\alpha\beta} dV = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^o} \int (T_{\alpha o} x^\beta + \tau_{\beta o} x^\alpha) dV \quad (29)$$

Πολ/ζοντας την δεύτερη από τις (28) επί $x^\alpha x^\beta$ και ολοκληρώνοντας πάλι σε όλο το χώρο και με ανάλογο όπως πριν μετασχηματισμό έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x^o} \int \tau_{\alpha o} x^\alpha x^\beta dV = -\int (\tau_{\alpha o} x^\beta + \tau_{\beta o} x^\alpha) dV \quad (30)$$

συγκρίνοντας τις (29) και (30) έχουμε:

$$\int \tau^{\alpha\beta} dV = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^{o^2}} \int \tau_{\alpha o} x^\alpha x^\beta dV \quad (31)$$

και επειδή $\tau_{oo} \equiv T_{oo} = \rho c^2$ όπου ρ η πυκνότητα μάζας στο σύστημα έχουμε:

$$\tau_{oo} = \rho c^2 \quad (32)$$

αντικαθιστώντας στην (31) και θέτοντας τον χρόνο $\tau = \frac{\gamma^o}{c}$ βρίσκουμε για την

(27)

$$\Psi^{\alpha\beta} = -\frac{2k}{c^4 R_o} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \rho x^\alpha x^\beta dV \quad (33)$$

Σε μακρινές αποστάσεις από τα σώματα – πηγές του πεδίου μπορούμε να θεωρήσουμε τα κύματα επίπεδα σε μικρές περιοχές του χώρου και

χρησιμοποιώντας την ροή ενεργείας που ακτινοβολείται από το σύστημα έστω στην διεύθυνση του άξονα x'

Στην (13) υπεισέρχονται οι ποσότητες

$$h_{23} = \Psi_{23} \text{ και } h_{22} - h_{33} = \Psi_{22} - \Psi_{33} \text{ και}$$

από την (33) έχουμε:

$$h_{23} = -\frac{2k}{3c^4 R_o} \ddot{D}_{23} \quad h_{22} - h_{33} = -\frac{2k}{3c^4 R_o} (\ddot{D}_{22} - \ddot{D}_{33}) \quad (34)$$

Όπου $D_{\alpha\beta}$ ο τανυστής ροπής

$$D_{\alpha\beta} = \int \rho (3x^\alpha x^\beta - \delta_{\alpha\beta} r^2) dV \quad (35)$$

και σαν αποτέλεσμα από την (13) έχουμε για την ροή ενεργείας κατά τον x' άξονα:

$$ct^{10} = \frac{k}{36\pi c^5 R_o^2} \left[\left(\frac{\ddot{D}_{22} - \ddot{D}_{33}}{2} \right)^2 + (\ddot{D}_{23})^2 \right] \quad (36)$$

(τελείες . δείχνουν παραγωγή ως προς t).

Τότε η ροή ενεργείας μέσα σε μια στερεά γωνία κατά την κατεύθυνση x' γίνεται με τον πολλαπλασιασμό της (36) επί τον παράγοντα $R_o^2 d\Omega$ όπου $d\Omega$ η στοιχειώδης στερεά γωνία. Οι 2 όροι της εκφράσεως (36) αντιστοιχούν σε 2 διαφορετικές πολικότητες ανεξάρτητες μεταξύ τους. Για να τις γράψουμε σε αναλλοίωτη μορφή ανεξάρτητη της διευθύνσεως της ακτινοβολίας που εκλέγουμε, έχουμε:

Ορίζουμε $e_{\alpha\beta}$ τον τανυστή πολικότητας του επιπέδου κύματος που καθορίζει τις μη μηδενικές συνιστώσες των $h_{\alpha\beta}$ για την ακτινοβολία των h_{ik} που $h_{o\alpha} = h_{o\beta} = h = 0$).

Ο τανυστής πολικότητας είναι συμμετρικός και ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$e_{\alpha\alpha} = 0 \quad e_{\alpha\beta} n^\beta = 0 \quad e_{\alpha\beta} e^{\alpha\beta} = 1 \quad (37)$$

$\bar{n}(\text{ή } n_\beta)$ είναι το μοναδιαίο κατά την διεύθυνση διαδόσεων του κύματος. Τότε χρησιμοποιώντας αυτόν τον τανυστή $e_{\alpha\beta}$ μπορούμε να γράψουμε την ένταση της ακτινοβολίας μιας ορισμένης πολικότητας μέσα σε στερεά γωνία $d\Omega$ σαν:

$$dI = \frac{k}{72\pi c^5} (\ddot{D}_{\alpha\beta} e^{\alpha\beta})^2 d\Omega \quad (38)$$

και η έκφραση (38) εξαρτάται από την κατεύθυνση της ακτινοβολίας μέσω της σχέσεως $e_{\alpha\beta} n^\beta = 0$.

Η ολική γωνιακή κατανομή πολικότητων παίρνεται με την άθροιση της (38) για κάθε πολικότητα ή ισοδύναμα, με τη μέση τιμή για κάθε πολικότητα πολλαπλασιάζοντας επί 2 (τον αριθμό των ανεξαρτήτων πολικότητων). Η μέση τιμή παίρνεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned} \overline{e_{\alpha\beta}e_{\gamma\delta}} = & \frac{1}{4} \{ n_{\alpha}n_{\beta}n_{\gamma}n_{\delta} + (n_{\alpha}n_{\beta}\delta_{\gamma\delta} + n_{\gamma}n_{\delta}\delta_{\alpha\beta}) - \\ & - (n_{\alpha}n_{\gamma}\delta_{\beta\gamma} + n_{\beta}n_{\gamma}\delta_{\alpha\delta} + n_{\alpha}n_{\delta}\delta_{\beta\gamma} + n_{\beta}\delta_{\alpha\gamma}) - \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \\ & + (\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\gamma} + \delta_{\beta\gamma}\delta_{\alpha\gamma}) \} \end{aligned} \quad (39)$$

$\delta_{\alpha\beta}$ τα σύμβολα του Kronecher και $n_{\alpha\beta}$ το μοναδιαίο της κατευθύνσεως α του κύματος η (39) είναι συμμετρική ως προς τους δείκτες και δίνει μονάδα σε συναίρεση στους δείκτες α, γ και β, δ ενώ δίνει μηδέν για πολλαπλασιασμό επί $\bar{n}$).

Το αποτέλεσμα είναι:

$$dI = \frac{k}{36\pi c^5} \left[(\ddot{D}_{\alpha\beta} n^{\alpha} n^{\beta})^2 + \frac{1}{2} (\ddot{D}_{\alpha\beta})^2 - \ddot{D}_{\alpha\beta} \ddot{D}_{\alpha\gamma} n^{\beta} n^{\gamma} \right] d\Omega \quad (40)$$

Η ολική τότε ακτινοβολία προς όλες τις κατευθύνσεις δηλαδή η απώλεια ενεργείας του συστήματος ανά μονάδα χρόνου $\left(-\frac{dE}{dt}\right)$ μπορεί να υπολογισθεί

με την μέση τιμή του $\frac{dI}{d\Omega}$ προς όλες τις κατευθύνσεις και τον πολλαπλασιασμό μετά επί 4π .

Η μέση τιμή παίρνεται με τους κανόνες:

$$\overline{n_{\alpha}n_{\beta}} = \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \text{ και } \overline{n_{\alpha}n_{\beta}n_{\gamma}n_{\delta}} = \frac{1}{15} (\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})$$

αν $n_{\alpha}n_{\beta}$ συμμετρική ποσότητα και $n_{\alpha}n^{\alpha} = 1$.

Τότε παίρνουμε σαν αποτέλεσμα:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{k}{45c^5} \ddot{D}_{\alpha\beta}^2 \quad (41)$$

Βλέπουμε ότι η ακτινοβολία βαρυτικών κυμάτων είναι φαινόμενο πέμπτης τάξεως του $\frac{1}{c}$. Αυτό το γεγονός μαζί με το ότι η σταθερά k της βαρύτητας είναι μικρή κάνει το συνηθισμένο φαινόμενο εξαιρετικά μικρό.

Σ' αυτήν την περίπτωση η σταθερά k που αναφέραμε παραπάνω είναι μια καθαρά μιγαδική σταθερά $k = ik$ και $k = \frac{\hbar G}{c^3 e}$ με $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ και h η σταθερά Planck G η σταθερά βαρύτητας c η ταχύτης του φωτός e το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο.

Η μετρική (4γ.28) προσεγγίζεται από την μετρική Reissner Nordström για $r \geq \sqrt{kQ} = a$ θεωρώντας ακόμη τις σταθερές $G=1$ $C=1$ έχουμε για την k , $k = \frac{\hbar}{\beta}$.

Στη γενικευμένη θεωρία το ίχνος της μετρικής αλλάζει από -2 σε -4 για $r < a$.

Έτσι έχουμε ένα τοπικό σύστημα μετρικής Minkowski (M^4) για $r > a$ και ένα σύστημα μετρικής 4-διάστατο ευκλείδειο (E^4) για $r < a$. Το φυσικό τμήμα του χωροχρόνου βρίσκεται στην περιοχή $r \geq a$ αφού η μηδενική κοσμική γραμμή δεν μπορεί να διαπεράσει μια σφαίρα S ακτίνας $r = a$.

Η γεωδαισιακή τροχιά ενός τέτοιου μη Riemann-ειου χώρου δίδεται από την εξίσωση

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} \quad (4\gamma.29)$$

όπου τα Γ_{kl}^i είναι μία Hermitian-ή μη συμμετρική σύνδεση που συνδέεται με τα γ_{ik} με την σχέση:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\ell} = g_{ink} \Gamma_{i\ell}^m + g_{im} \Gamma_{\ell k}^m \quad (4\gamma.30)$$

Για να εξετάσουμε τον σφαιρικό χαρακτήρα πρέπει να βρούμε τις μέγιστες συντεταγμένες που αντιστοιχούν στη λύση. Οι νέες συντεταγμένες θα δημιουργούν μian αναλυτική επέκταση ώστε η μετρική να μην είναι παντού μη ομαλή στο φυσικό χωρόχρονο ($r \geq a$) και τότε θα φανεί ότι η γενικευμένη θεωρία είναι πλήρης για time-like και μηδενικές καμπύλες.

Όπως στη μετρική Reissner-Nordström ανώμαλα σημεία των συντεταγμένων είναι στα:

$$r_{\pm} = m \pm (m^2 - 4\pi Q^2)^{1/2} \quad (4\gamma.31)$$

όταν $m^2 > 4\pi Q^2$, ενώ για $m^2 = 4\pi Q^2$ είναι μόνο ένα ανώμαλο σημείο στο $r = m$.

Πρώτα εξετάζουμε την περίπτωση $4\pi Q^2 < m^2$ και επεκτείνουμε τα (r, t) σύστημα κατά πλάτος των σημείων r_+, r_- .

Ορίζουμε την προχωρημένη και καθυστερούσα χρονική συντεταγμένη (advanced and retarded time coordinate)

$$v = t + \bar{r} \quad (4\gamma.32)$$

$$\omega = t + \bar{r}$$

όπου

$$d\bar{r} = - \frac{(r_+ + r_-)r - r_+ r_-}{(r - r_+)(r - r_-)} \frac{dr}{\left(1 - k^2 \frac{\theta^2}{r^4}\right)^{1/2}} \quad (4\gamma.33)$$

{ Η συνάρτηση $\bar{r}$ μπορεί να ολοκληρωθεί ρητώς παντού στον χώρο $r \geq a$,
 $a = \sqrt{kQ}$, ως εξής:

$$\begin{aligned}\bar{r}(r) &= -\int \frac{[(r_+ + r_-)r - r_+ r_-]dr}{(r - r_+)(r - r_-) \left(1 - k^2 \frac{\theta^2}{r^4}\right)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \int \left[1 - \frac{r^2}{(r - r_+)(r - r_-)}\right] \left(\frac{dr}{1 - a^4/r^4}\right) = \\ &= \int_a^r \frac{r^2 dr}{(r^4 - a^4)^{\frac{1}{2}}} - r^*(r)\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}r^*(r) &= \int_a^r \frac{r^2 dr}{(r - r_+)(r - r_-) \left(1 - a^4/r^4\right)} = \\ &= \int_a^r \frac{r^2 dr}{(r^4 - a^4)^{\frac{1}{2}}} + \int_a^r \frac{r^2 r^2 + dr^2}{(r_+ - r_-)(r - r_+)(r^4 - a^4)^{\frac{1}{2}}} - \\ &- \int_a^r \frac{r^2 r^2 - dr^2}{(r_+ - r_-)(r - r_-)(r^4 - a^4)^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

οπότε έχουμε αμέσως

$$= \int_a^r \frac{r^2 dr}{(r^4 - a^4)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a}{\sqrt{2}} F(\varepsilon, S) - \sqrt{2} a E(\varepsilon, S) + \frac{(r^4 - a^4)^{1/2}}{r}$$

όπου $\varepsilon = \cos^{-1}(r/a)$, $S = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $F(\varepsilon, S)$ ελλειπτικό ολοκλήρωμα α' είδους,

$F(\varepsilon, S)$ ελλειπτικό ολοκλήρωμα β' είδους και:

$$\begin{aligned}&\int_a^r \frac{r^2 dr}{(r - r_{\pm})(r^4 - a^4)^{\frac{1}{2}}} = \int_a^r \frac{r dr}{(r^4 - a^4)^{\frac{1}{2}}} + \\ &+ r_{\pm} \int_a^r \frac{dr}{(r^4 - a^4)^{\frac{1}{2}}} + r_{\pm}^2 \int_a^r \frac{r dr}{(r^2 - r_{\pm}^2)(r^4 - a^4)^{\frac{1}{2}}} + r_{\pm}^3 \int_a^r \frac{dr}{(r^2 - r_{\pm}^2)(r^4 - a^4)^{\frac{1}{2}}} = \\ &+ \frac{1}{2} \ell u \frac{r^2 + (r^4 - a^4)^{\frac{1}{2}}}{a^2} + \frac{r_{\pm}}{\sqrt{2}a} F(\varepsilon, S) + \\ &+ r_{\pm}^2 \frac{1}{2(r_{\pm}^4 - a^4)^{\frac{1}{2}}} \ell u \left[\frac{-a^2 + (r^4 - r_{\pm}^2)}{(r_{\pm}^2 r^2 - a^4) + [(r_{\pm}^4 + a^4)(r^4 - a^4)]^{\frac{1}{2}}} \right] + \\ &+ r_{\pm}^3 \left[\frac{-a \Pi\left(\varepsilon, \frac{r_{\pm}^2}{r_{\pm}^2 - a^2}, S\right)}{\sqrt{2} r_{\pm}^2 (r_{\pm}^2 - a^2)} - \frac{1}{\sqrt{2} a r_{\pm}^2} F(\varepsilon, S) \right]\end{aligned}$$

όπου $\Pi\left(\varepsilon, \frac{r_{\pm}^2}{r_{\pm}^2 - a^2}, S\right)$ το ελλειπτικό ολοκλήρωμα γ' είδους.

με τα (u, r) από την 4γ.32 έχουμε το ds^2

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{4\pi Q^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{a^4}{r^4}\right) du^2 - \\ & - 2 \left(\frac{2m}{r} - \frac{4\pi Q^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{a^4}{r^4}\right)^{\frac{1}{2}} dr du - \\ & - \left(1 + \frac{2m}{r} - \frac{4\pi Q^2}{r^2}\right) dr^2 - r^2 (\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) \end{aligned} \quad (4\gamma.34)$$

ενώ πάλι από την (4γ.32) έχουμε το ds^2 για (w, r)

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{4\pi Q^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{a^4}{r^4}\right) dw^2 + \\ & + 2 \left(\frac{2m}{r} - \frac{4\pi Q^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{a^4}{r^4}\right)^{\frac{1}{2}} dw dr - \\ & - \left(1 + \frac{2m}{r} - \frac{4\pi Q^2}{r^2}\right) dr^2 - r^2 (\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) \end{aligned} \quad (4\gamma.35)$$

Παρατηρούμε ότι τα ds (4γ.34,35) είναι κανονικά παντού για $r > a$ παρ' όλο που «θυσιάσαμε» το αναλλοίωτο της αντιστρεψιμότητας του χρόνου περιλαμβάνοντας όρους $dr du$ ή $dr dw$ αντίστοιχα.

Η (4γ.35) είναι η αντιστρόφου χρόνου της (4γ.34).

Από την (4γ.33) βλέπουμε ότι η $\frac{\partial \bar{r}}{\partial r}$ έχει ένα σημείο-προέκταση στο $r=a$.

Η περιοχή (w, r) είναι ακριβώς η προέκταση της περιοχής (u, r) στο δεύτερο φύλλο του Riemann (Riemann Sheet) του $\frac{\partial \bar{r}}{\partial r}$, όπου το $d\bar{r}$ γίνεται $-d\bar{r}$.

Τότε οι ακτινικές μηδενικές κοσμικές γραμμές δίνονται από την εξίσωση:

$$(1 - \Lambda) \left(1 - \frac{a^4}{r^4}\right) dv^2 - 2\Lambda \left(1 - \frac{a^4}{r^4}\right)^{\frac{1}{2}} dr dv - (1 + \Lambda) dr^2 = 0 \quad (4\gamma.36)$$

όπου

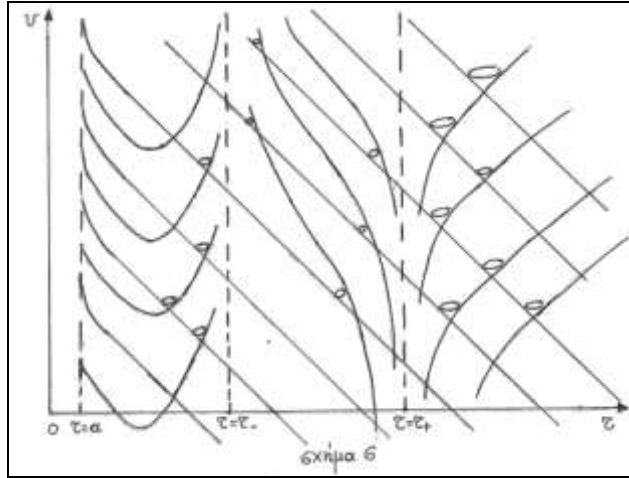
$$\Lambda = \frac{2m}{r} - \frac{4\pi Q^2}{r^2} \quad (4\gamma.37)$$

οι λύσεις της (4γ.36) είναι τότε:

$$\frac{dv}{dr} = \left(\frac{\Lambda \pm 1}{1 - \Lambda}\right) \left(1 - \frac{a^4}{r^4}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1 + 2m/r - 4\pi Q^2/r^2}{1 - 2m/r + 4\pi Q^2/r^2} \frac{1}{\left(1 - a^4/r^4\right)^{1/2}} - \\
& - \frac{1}{\left(1 - a^4/r^4\right)^{1/2}}
\end{aligned} \tag{4γ.38}$$

Οι κώνοι του φωτός οριζόμενοι από την (4γ.38) έχουν την παρακάτω μορφή του Σχ. 6.



Στο Σχήμα 6 θεωρήθηκε $r_+ > r_- \gg a$ που περίπου ισχύει για $k = \hbar/e$. Κοντά στον ορίζοντα των γεγονότων οι ακτίνες του φωτός συμπεριφέρονται σαν τον μετασχηματισμό συντεταγμένων των Eddington-Finkelstein στη λύση Reissner-Nordström. Εισερχόμενες μηδενικές κοσμικές γραμμές μπορούν να διασταυρωθούν και με τα 2 και το r_+ και το r_- ασυμπτωτικά από $r = a$.

Το ότι οι μηδενικές κοσμικές γραμμές στρέφονται μακριά από το r_- καθώς απομακρύνονται από το $r = a$ θα προκαλούσε την παραβίαση της αιτιότητας αν η συντεταγμένη v ήταν καθαρά χρονική συντεταγμένη. Αλλά σ' αυτές τις συντεταγμένες αυτή η συμπεριφορά οδηγεί σε κάτι τέτοιο μόνο αν το a είναι μικρότερο από το σημείο όπου οι ακτίνες φωτός στρέφονται (στο αριστερό άκρο). Αυτή η τελευταία περίπτωση παραβιάσεως της αιτιότητας είναι η συνηθισμένη για αστρονομικές τιμές των m και Q και αφορά στη μορφή των μελανών οπών αυτού του τύπου.

(Ακόμα αν στο σχήμα 6 αντιστρέψουμε συμμετρικά ως προς τον άξονα r και αλλάξουμε την φορά των κινήσεων, ή, αν τη δέσμη παραλλήλων μηδενικών κοσμικών γραμμών την στρέψουμε συμμετρικά ως προς v άξονα τον οποίον μετά να ονομάσουμε w , πάντα έχουμε το ανάλογο διάγραμμα στην περιοχή

(w, r) , αν και τις καμπυλόγραμμες στρέψουμε συμμετρικά ως προς r και αλλάξουμε τα βέλη των κινήσεων). Αν τώρα εξετάσουμε την συμπεριφορά των κοσμικών γραμμών στη φυσική περιοχή (ν, r) .

Περιοριζόμαστε αρχικά στην ακτινική περίπτωση. Έχουμε

$$u_i u^i = 1 \rightarrow 1 = \hat{g}_{ik} \frac{d\hat{x}^i}{dS} \frac{d\hat{x}^k}{dS} \quad (4\gamma.39)$$

που στο σύστημα (ν, τ) δίνει:

$$\begin{aligned} & \left[\left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{4\pi Q^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{a^4}{r^4} \right)^2 - \right. \\ & \left. - 2 \left(\frac{2m}{r} - \frac{4\pi Q^2}{r^4} \right) \left(1 - \frac{a^4}{r^4} \right)^2 \frac{dr}{d\nu} - \right. \\ & \left. - \left(1 + \frac{2m}{r} - \frac{4\pi Q^2}{r^2} \right) \left(\frac{dr}{d\nu} \right)^2 \right] \left(\frac{d\nu}{ds} \right) = 1 \end{aligned} \quad (4\gamma.10)$$

Από την (4γ.29) έχουμε μια σταθερά της κινήσεως

$$\left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{4\pi Q^2}{r^2} \right) \frac{dt}{ds} = \text{σταθ.} = U_o \quad (4\gamma.41)$$

όπου η U_o συνδέεται με την ενέργεια του σωματίου. Για σωματίο χωρίς μάζα $ds=0$ άρα $u_o = \infty$.

Από τις (4γ.39&40) με τη βοήθεια της (4γ.32) παίρνουμε:

$$\left(\frac{dr}{d\nu} + \hat{g}_{(01)} \frac{Y}{Z} \right)^2 = \frac{(\hat{g}_{(01)} Y)^2 - \hat{g}_{00} YZ}{Z^2} \quad (4g.42)$$

$$\begin{aligned} \text{όπου} \quad \hat{g}_{(01)} &= - \left(\frac{2m}{r} - \frac{4\pi Q^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{a^4}{r^4} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \hat{g}_{00} &= \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{4\pi Q^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{a^4}{r^4} \right) \end{aligned} \quad (4\gamma.43)$$

$$a = \sqrt{kQ}$$

$$Y = U_o^2 \left(1 - \frac{a^4}{r^4} \right)^2 - \hat{g}_{00}$$

$$Z = \left(-1 - \frac{2m}{r} + \frac{4\pi Q^2}{r^2} \right) u_o^2 \left(1 - \frac{a^4}{r^4} \right) - \hat{g}_{(01)}^2$$

η εξίσωση (4γ.42) δίνει:

$$Y(\hat{g}_{(01)}^2 Y - \hat{g}_{00} Z) > 0$$

ή

$$g(r) \equiv \frac{1 - 2m/r + 4\pi Q^2/r^2}{1 - a^4/r^4} < u_o^2 \quad (4\gamma.44)$$

και

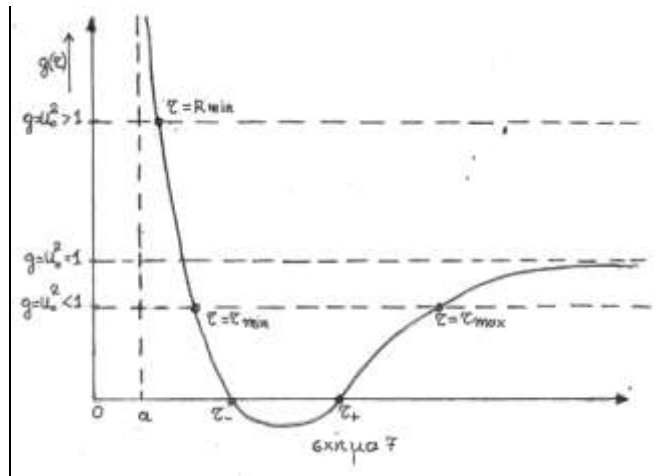
1) για $u_o^2 < 1$ η (4γ.44) υπαγορεύει την διακύμανση του σωματίου μεταξύ της μεγίστης και ελαχίστης ακτίνας του $r_{\max} > r > r_{\min} > a$

2) για $u_o^2 \geq 1$ $r > R_{\min} > a$ (για $u_o^2 \geq 1$ $r_{\max} = \infty$ $r_{\min} = R_{\min}$

3) για $u_o^2 \rightarrow \infty$, $R_{\min} \rightarrow a$ (αντίστοιχη περίπτωση μηδενικής κοσμικής γραμμής).

Η περιοχή (w, r) έχει την ίδια ακριβώς συμπεριφορά αλλά για να περιγραφεί πρέπει να θέσω όπου $\hat{g}_{(01)}$ το $-\hat{g}_{(01)}$ ώστε η (4γ.32) να ισχύει πάλι.

Ένα διάγραμμα (Σχ. 7) μας δείχνει την $g(r)$ συναρτήσει του r όπου οι περιπτώσεις :



Οι time-like κοσμικές γραμμές όπως και στη λύση Reissner-Nordström εμποδίζονται να φθάσουν στο $r=0$.

Στη γενικευμένη θεωρία όπως βλέπουμε και οι μηδενικές κοσμικές γραμμές εμποδίζονται να φθάσουν στο $r=0$ επίσης.

Στο όριο $a = \sqrt{kQ} \rightarrow 0$ οι ακτινικές μηδενικές κοσμικές γραμμές φθάνουν στο $r=0$ σε πεπερασμένο χρόνο και επομένως τότε η ουσιαστική «ανωμαλία» του χωροχρόνου επανεμφανίζεται στην φυσική περιοχή. (Ο χρόνος που εννοούμε είναι ο proper-time του κινούμενου σωματίου ή φωτονίου γιατί ο χρόνος για τον μακρινό παρατηρητή είναι ∞).

Για $a \neq 0$ οι ακτινικές φωτεινές ακτίνες φθάνουν στο ... με $\frac{dr}{dv} = 0$ και $\frac{d^2r}{dv^2} > 0$ και σε πεπερασμένο διάστημα του proper time. Η εισερχόμενη λύση, (v, r) επίπεδο, ομαλά περνά στην εξερχόμενη λύση (w, r) επίπεδο. Αυτό σημαίνει ότι μια ακτινική κοσμική γραμμή που φθάνει στο $(r = a)$ περνά ομαλά στο β' φύλλο-περιοχή του Riemann όπου το $\frac{\partial \bar{r}}{\partial r}$ αναπαρίσταται πλέον με το σύστημα (w, r) .

Με έναν μετασχηματισμό συντεταγμένων που να μας δίνει $\frac{dr'}{dt'} = \pm 1$ δηλαδή να αναπαριστά τις μηδενικές κοσμικές γραμμές σε ευθείες με κλίση 1 (γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον άξονα t') και μήκος τόξου ds

$$ds^2 = f^2(r', t') (dr'^2 - dt'^2) - r^2(r', t') (\sin^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2) \quad (4\gamma.45)$$

έχουμε μια πιο καθαρή εικόνα της συμπεριφοράς των time-like και μηδενικών κοσμικών γραμμών με τον μετασχηματισμό των g_{ik} με τον νόμο του μετασχηματισμού

$$g_{ik} = \frac{\partial \hat{x}^\ell}{\partial x^i} \frac{\partial \hat{x}^m}{\partial x^k} \hat{g}_{\ell m} \quad (4\gamma.46)$$

έχουμε:

$$\left[\left(\frac{\partial t'}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial r'}{\partial t} \right)^2 \right] f^2(r', t') = \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{4\pi Q^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{a^4}{r^4} \right) \quad (4\gamma.47)$$

$$\left[\left(\frac{\partial t'}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{\partial r'}{\partial r} \right)^2 \right] f^2(r', t') = - \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{4\pi Q^2}{r^2} \right)^{-1} \quad (4\gamma.48)$$

$$\left(\frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial t'}{\partial r} - \frac{\partial r'}{\partial t} \frac{\partial r'}{\partial r} \right) f^2(r', t') = 0 \quad (4\gamma.49)$$

$$\left(\frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial r'}{\partial r} - \frac{\partial r'}{\partial t} \frac{\partial t'}{\partial r} \right)^2 \hat{g}_{01} = \frac{kQ}{r^2} \quad (4\gamma.50)$$

Συγκρίνοντας τις (4γ.47) (4γ.48) (4γ.49) παίρνουμε:

$$\frac{\partial r'}{\partial t} = \pm \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{4\pi Q^2}{r^2} \right)^{-1} \left(1 - \frac{a^4}{r^4} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial t'}{\partial r} \quad (4\gamma.51)$$

$$\frac{\partial r'}{\partial t} = \pm \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{4\pi Q^2}{r^2} \right)^{-1} \left(1 - \frac{a^4}{r^4} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial t'}{\partial r} \quad (4\gamma.52)$$

η μορφή των λύσεων των (4γ.51) (4γ.52) για το r', t' δίδεται (Kunnsatter, J.W. Moffat 1977)

$$r'(r,t)=r'(r^*,t)=h(r^*+t)+g(r^*-t) \quad (4\gamma.53)$$

$$t'(r,t)=t'(r^*,t)=h(r^*+t)-g(r^*-t) \quad (4\gamma.54)$$

όπου

$$\begin{aligned} \frac{\partial r^*}{\partial r} = & \pm \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{4\pi Q^2}{r^2} \right)^{-1} \left(1 - \frac{a^4}{r^4} \right)^{\frac{1}{2}} = \\ & \pm \frac{r^4}{(r-r_+)(r-r_-)(r^4-a^4)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (4\gamma.55)$$

η διπλή τιμή του $\frac{\partial r^*}{\partial r}$ οφείλεται στο σημείο προέκταση του $r=a$ (που προκαλεί το πέρασμα ανάμεσα στα δύο φύλλα του Riemann του (v,r) και (w,r) επιπέδου).

Το θετικό σημείο το αντιστοιχούμε με τον φυσικό 4-χώρο ενώ το σημείο (-) με το δεύτερο φύλλο του Riemann που είναι ισομετρικό με το πρώτο.

[η ολοκλήρωση της (4γ.55) γίνεται όπως και της (4γ.33)]

Για $r_- < r < r_+$ εκλέγουμε $h(r^*+t)=Ae^{b(r^*+t)}$ και

$$g(r^*-t)=-Ae^{b(r^*-t)} \quad (4\gamma.56)$$

ώστε να εξασφαλίζουμε το $f^2(r',t') > 0$.

Με κατάλληλο b το $f^2(r',t')$ δεν έχει τιμές 0 για τα r_+, r_- . Η μηδενική τιμή του $f^2(r',t')$ στο $r=a$ δεν μπορεί όμως να εξαλειφθεί γιατί το a δεν είναι ανώμαλο σημείο των συντεταγμένων αλλά όπως φαίνεται απ' όλα τα παραπάνω πρόκειται για ένα σύνορο όπου η τοπολογία αλλάζει. Η ανωμαλία των συντεταγμένων βέβαια μπορεί να εξαλειφθεί μόνο τοπικά στην περιοχή των r_+, r_- και όχι έξω από αυτήν.

Οι Kunsatter και Moffat αποδεικνύουν ότι η ανωμαλία στα r_+, r_- αίρεται όταν

$$b_{\pm} = \pm \left(\frac{2r_{\pm}^2}{r_+ - r_-} \right)^{-1} \left(1 - \frac{a^4}{r^4} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4\gamma.56)$$

όπου τα b_+, b_- είναι οι σταθερές ολοκληρώσεως που αντιστοιχούν στα r_+, r_- αντίστοιχα. Με τέτοια εκλογή η συνάρτηση $f^2(r',t')$ είναι παντού αναλυτική, θετική και δεν μηδενίζεται πουθενά εκτός από την σφαίρα $r=a$ όπου $f^2(r',t')=0$.

Όταν $a \rightarrow 0$ τα ελλειπτικά ολοκληρώματα της $r^*(r)$ [που προκύπτουν από την ολοκλήρωση της (4γ.55)] εξαφανίζονται και προκύπτει ότι τότε:

$$r^* \rightarrow r + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \ell u \left(\frac{r - r_+}{r_+} \right) - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ell u \left(\frac{r - r_-}{r_-} \right) \quad (4\gamma.57)$$

Επίσης όταν $a \rightarrow 0$:

$$f^2(r', t') \rightarrow \left(\frac{1}{4b^2 A^2} \right) \left[\frac{(r-r_+)(r-r_-)}{r^2} \right] e^{-2br} \chi \left(\frac{r-r_+}{r_+} \right)^{-2br_+^2/(r_+-r_-)} \chi \left(\frac{r-r_-}{r_+} \right)^{2br_-^2/(r_+-r_-)} \quad (4\gamma.58)$$

και

$$b_{\pm} \rightarrow \pm \left(\frac{2r_{\pm}^2}{r_+ - r_-} \right)^{-1} \quad (4\gamma.59)$$

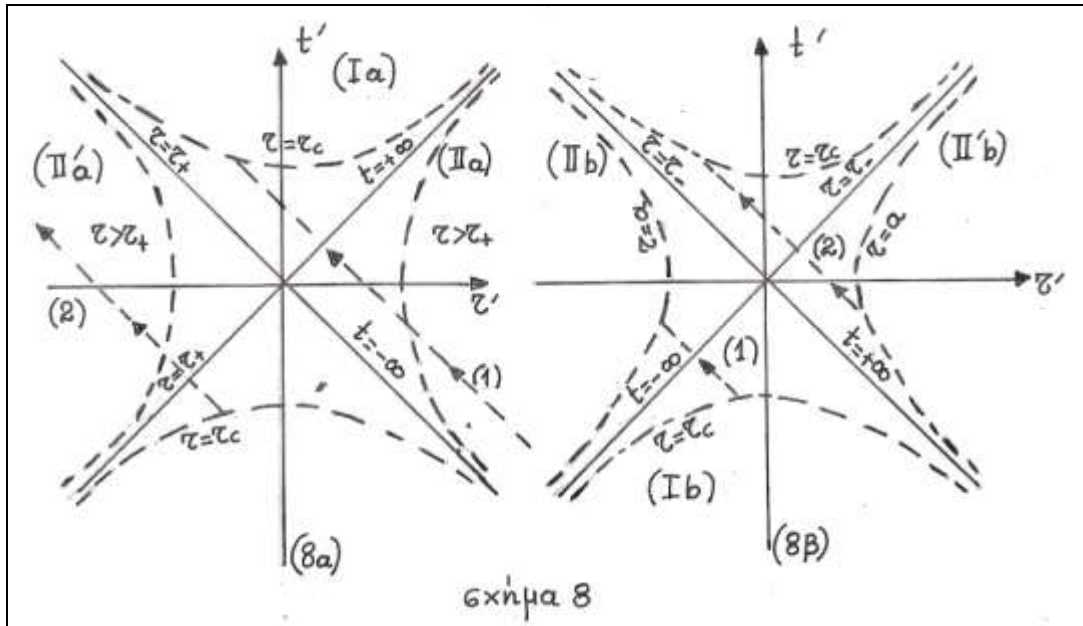
Ο μετασχηματισμός τότε που ορίζεται από τις (4γ.53,54) και (4γ.56) είναι της μορφής:

$$r'_{\pm}(r, t) = 2Ae^{(b_{\pm})r^*} \cdot \cosh[(b_{\pm})t] \quad (4\gamma.60)$$

$$t'_{\pm}(r, t) = 2Ae^{(b_{\pm})r^*} \cdot \sinh[(b_{\pm})t] \quad (4\gamma.61)$$

Στην περιοχή $r \geq r_+$, b_+ θετικό και επειδή t είναι παρατηρητής στο άπειρο, ένα φυσικό σώμα κινείται προς τον άξοντα t' καθώς $t \rightarrow \infty$. Επειδή $f^2(r', t')$ θετικό παντού η t' η συντεταγμένη είναι παντού time-like.

Στη φυσική περιοχή του Riemann (στην εξίσωση 4γ.55 το + σημείο για το $\frac{\partial r^*}{\partial r}$) έχουμε μορφές:



Οι ακτινικές μηδενικές γραμμές όπως φαίνεται στο σχ. 8α, 8β μπορούν να διαπεράσουν την r_+ και προς τις 2 κατευθύνσεις (οι μηδενικές γραμμές παρίστανται με το κόκκινο χρώμα και έχουν κλίσεις ± 1 ως προς t').

Μπορούν να έρθουν (8α) από το ∞ στην περιοχή Π_a να διαπεράσουν την r_+ σφαίρα προς κάποια περιοχή r_c της περιοχής I_a . Μετά περνούν (8β) από την ψ , διαπερνούν την ψ σφαίρα και φθάνουν την σφαίρα a της περιοχής Π_b (μηδενική γραμμή (1) του σχ. 8).

Επίσης (μηδενική γραμμή (2) του σχ. 8) μπορούν να ξεκινούν από την περιοχή Π'_b (8β) από την σφαίρα a και διαπερνώντας την σφαίρα r_- να έρχονται σε μια r_c της περιοχής I_b (8β) και από την r_c, I_a (8α), να διαπερνούν την σφαίρα r_+ και να φεύγουν προς το άπειρο.

Αντιστρέφοντας το πρόσημο $r^* \rightarrow -r^*$, $b_{\pm} \rightarrow -b_{\pm}$ έχουμε το δεύτερο «φύλλο» του Riemann (Riemann Sheet) και ακριβώς τα ίδια διαγράμματα αν σε κάθε επί μέρους σχήμα εναλλάξουμε στο 8α τους άξονες ($t = +\infty, r = r_+$) και ($r = r_+, t = -\infty$) και στο 8β τους ($r = r_-, t = -\infty$) και ($r = r_-, t = +\infty$) και αντιστρέφουμε την πορεία των μηδενικών κοσμικών γραμμών.

Τέτοια μορφής διαγράμματα λέγονται διαγράμματα Kruskal για επεκταθείσες συντεταγμένες (r', t') .

Οι περιοχές I, II και I, II' των ανωτέρω διαγραμμάτων αντιπροσωπεύουν περιοχές ισομετρικές αντίστοιχα με τις $(v, r)(w, r)$ προηγούμενες συντεταγμένες.

Τα συμπεράσματα παρουσιάζουν τρομερό ενδιαφέρον. Όπως σε όλα τα παραπάνω φαίνεται οι εισερχόμενες κοσμικές γραμμές «αναπηδούν» σε κάποια ελάχιστη σφαίρα (ελάχιστη ακτινική απόσταση από την singularity $r=0$) και μετά περνούν σε μια ισομετρική περιοχή (ισομετρική με το τμήμα απ' όπου έρχονται).

Το σωματίο διαφεύγει σε κάποιον άλλο χωρόχρονο ασυμπτωτικά γαλιλαϊκό (δηλαδή γαλιλαϊκό στο ∞). Το σωματίο δεν μπορεί να επιστρέψει από τον «ορίζοντα των γεγονότων» στον δικό μας κόσμο γιατί τότε η αρχή της αιτιότητας θα παραβιαζόταν.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Σωτηρίου Ν. Σβολόπουλου: «Μαθήματα Αστροφυσικής», Αθήνα 1980
2. Σωτηρίου Ν. Σβολόπουλου: «Απηγορευμένοι φασματικά γραμμάι εις την Αστροφυσική, Αθήνα 1948.
3. Astrophysics and Space Science Library: «Neutron Stars, Black Holes and Binary X – Ray Sources», H. Gursky and R. Ruffini (eds.) Volume 48. D. Reidel Publ.Co.
4. A. Einstein, A. Lorentz, H. Weyl, H Minkowski : «The Principle of Relativity», Dover N.Y. 1952 repinted.
5. Peter Gabriel: «Introduction to the Theory of Relativity» Dover N.Y.
6. J.L. Synge YNG: «Relativity – The General Theory» North Holland, Amsterdam 1960.
7. C.W. Misner, K.S. Thorne: «Gravitation», Freeman, San Francisco 1973.
8. Physical Review: «Particles and Fields», Volume 17, 3rd series January – June, 1978 Published for the American Physical Society by the American Institute of Physics.
9. Pauli W. Pauli: «Theory of Relativity», Pergamon Press N.Y.
10. L.D. Landau and F.M. Lifshitz: «The classical Theory of Fields» Pergamon Press N.Y.
11. Kip S. Thorn: Μαύρες Τρύπες και στρεβλώσεις του Χωροχρόνου, Εκδόσεις Κάτοπτρο, Αθήνα 1999
12. Μάνος Δανέζης και Στράτος Θεοδοσίου: Το Σύμπαν που αγάπησα-Εισαγωγή στην Αστροφυσική, , Εκδόσεις Δίαυλος, Αθήνα 1999
13. Η Κοσμολογία της Νόησης – Εισαγωγή στην Κοσμολογία, Εκδόσεις Δίαυλος, 2003.
14. (X).: Διπλωματική εργασία στο Τμήμα Φυσικής, (αγνώστου φοιτητή), υπό την επίβλεψη του καθ. Αστροφυσικής Σ. Σβολόπουλου.